NACHBESPRECHUNG 1. MINI QUIZ

1. $n^6 + 10n^5 + 20n^2 = O(n^6)$ True or false?

$\rightarrow$ True

2. $n^4 - 5n^2 \leq O(\frac{n^4}{\log n})$. True or false?

False

3. Which of these statements is correct?

1. $e^{3\log(n)} \leq O(n)$
2. $e^{\log(3)+\log(n)} \leq O(n)$

$e^{3\log(n)} = e^{\log(n^3)} = n^3$

$e^{\log(3)+\log n} = e^{\log(3)} \cdot e^{\log n} = 3 \cdot n$

4. Let $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ and $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ be three functions.
Assume that $f(n) \leq O(n \cdot g(n))$ and $g(n) \leq O(n^2 \cdot h(n))$.
Then it must be true that $f(n) \leq O(n^3 h(n))$.

True

5. We want to prove that $2^{2n} \leq (2n)!$ for all integers $n \geq 2$ using induction.
Which of the following is a correct *base case* for the inductive argument?

a) $2^2 = 4 \leq 24 = 4! = (2\cdot 2)!$

b) $2^{2\cdot 2} = 2^4 = 16 \leq 24 = 4! = (2\cdot 2)!$

c) For some k, assume that $2^{2k} \leq (2k)!$

d) $2^{2\cdot 3} = 2^6 = 64 \leq 720 = 6! = (2\cdot 3)!$

NACHBESPRECHUNG SERIE 1

Aufgabe 1.2

(c)* Show that parts (a) and (b) generalise to an arbitrary $k \geq 4$, i.e., show that $\sum_{i=1}^{n} i^k \leq n^{k+1}$ and that $\sum_{i=1}^{n} i^k \geq \frac{1}{2^{k+1}} \cdot n^{k+1}$ holds for any $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \underbrace{1^k + 2^k + \ldots + n^k}_{n \text{ Summanden}} \leq n \cdot n^k = n^{k+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^k \geq \sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} i^k = \sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} \left(\frac{n}{2}\right)^k = \underbrace{(n - \lceil \tfrac{n}{2} \rceil + 1)}_{= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^k \geq \left(\frac{n}{2}\right) \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^k = \frac{1}{2^{k+1}} \cdot n^{k+1}$$

Aufgabe 1.3

(e)* If f grows asymptotically slower than g, and g grows asymptotically slower than h, then f grows asymptotically slower than h.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(m)}{g(m)} = 0 \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{g(m)}{h(m)} = 0$$

$\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = F \wedge \lim\limits_{n \to \infty} g(n) = G \implies \lim\limits_{n \to \infty} f(n) \cdot g(n) = F \cdot G$

$$\lim_{n \to \infty} \underbrace{\frac{f(m)}{\cancel{g(m)}}}_{0} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{g(m)}}{h(m)}}_{0} = 0$$

(f)* If f grows asymptotically slower than g, and $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ grows asymptotically faster than 1, then f grows asymptotically slower than $g(h(m))$.

$h(m) = m^3$
$f(m) = \frac{1}{m^2}$
$g(m) = \frac{1}{m}$

Aufgabe 1.4b

in a) $\sqrt{3n+1}$

want to show: $\underline{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{3n}}$, $n \geq 1$

Base Case: ...
Induktionshypothese: ...
Induktionsschritt:

$$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k}}_{\text{I.H.}: \leq \frac{1}{\sqrt{3k}}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+3}}$$

$$\Leftarrow \frac{2k+1}{2k+2} \leq \sqrt{\frac{3k}{3k+3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2k+1}{2k+2} \leq \sqrt{\frac{k}{k+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2k+1)^2}{(2k+2)^2} \leq \frac{k}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow (4k^2+4k+1)(k+1) \leq (4k^2+8k+4) \cdot k$$

$$\Leftrightarrow 4k^3 + 8k^2 + 5k + 1 \leq 4k^3 + 8k^2 + 4k \qquad | -(4k^3 + 8k^2 + 4k)$$

$$\Leftrightarrow k+1 \leq 0$$

Starsuche

Star := jede andere Person kennt ihn, er kennt niemanden

Ziel: Star unter n Personenen mit möglichst wenig Fragen finden

1. Ansatz: jede Person nach allen anderen fragen: $n(n-1)$

2. Ansatz (induktiv):
   - eine Person nach "draußen" schicken
   - rekursive Starbestimmung unter verbleibenden $n-1$ Personen
   - Person wieder reinholen und prüfen, ob sie der Star ist (worst case: $2(n-1)$ Fragen)

   Worst Case Szenario: $F(n) = 2(n-1) + F(n-1)$
   $= 2(n-1) + 2(n-2) + F(n-2)$
   $= 2(n+1) + 2(n-2) + \ldots + 2 = n(n-1)$

   → keine Verbesserung

3. Ansatz: Idee: Vermeiden, den Star rauszuschicken
   → Frage p_n, ob sie p_{n-1} kennt
   → ja: p_n ist kein Star, wir schicken p_n raus
   → nein: p_{n-1} ist kein Star, wir schicken p_{n-1} raus

$$F(n) = \begin{cases} 2 & \text{für } n=2 \\ \underset{\uparrow \text{ Frage vorm Rausschicken}}{1} + F(n-1) + \underset{\uparrow \text{ Fragen nach dem Reinholen}}{2} & \text{für } n>2 \end{cases}$$

$F(n) = 3 + F(n-1) = 3 + 3 + F(n-2) = 3(n-2) + 2 = 3n-4$

O-Notation

Definition: Sei $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$

$$O(f) := \{ g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid \exists c > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0: g(n) \leq c \cdot f(n) \}$$

↑ Menge aller Funktionen, die nicht schneller wachsen als f

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Aufgabe (PVW-Skript):
Sortiere die folgenden Terme nach aufsteigendem asymptotischen Wachstum

$\log(n^a) = a \cdot \log(n)$

n^5+n	$\log n^4$	$\sqrt{n}$	$\binom{n}{3}$	2^{16}	n^n	$n!$	$\log^8(n)$
6	2	4	5	1	8	7	3

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{1}{3!} \cdot n(n-1)(n-2) \in O(n^3)$$

$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
$\leq n^n$

$n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$

Theorem 1. *Let N be an infinite subset of $\mathbb{N}$ and $f : N \to \mathbb{R}^+$ and $g : N \to \mathbb{R}^+$.*

- *If* $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, *then* $f \leq O(g)$ *and* $g \not\leq O(f)$.
- *If* $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = C \in \mathbb{R}^+$, *then* $f \leq O(g)$ *and* $g \leq O(f)$.
- *If* $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$, *then* $f \not\leq O(g)$ *and* $g \leq O(f)$.

Aufgabe (Übungsserie HS23)

(b) Find f and g as in Theorem 1 such that $f \leq O(g)$, but the limit $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ does not exist. This proves that the first point of Theorem 1 provides a sufficient, but not a necessary condition for $f \leq O(g)$.

$$f(n) = (-1)^n + 2$$

$$g(n) = 4$$

Aufgabe: Beweise oder widerlege

$e^{2n} \leq O(e^n)$ [FS22]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^{2n}} = \lim_{n\to\infty} e^{n-2n} = \lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0 \quad \longrightarrow \text{Falsch}$$

$\frac{n}{\log n} \leq O(\sqrt{n})$ [FS20]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\frac{n}{\log n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}} \cdot \log n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad \longrightarrow \text{Falsch}$$

Challenge: $\sum_{i=1}^{n} (n-i)^4 \leq O(n^{4,5})$ [HS21]

$$\sum_{i=1}^{n} (n-i)^4 \geq \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (n-i)^4 \geq \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \left(n-\frac{n}{2}\right)^4 = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)^4 = \left(\frac{n}{2}\right)^5 = \frac{n^5}{32} \not\leq O(n^{4,5}) \quad \longrightarrow \text{Falsch}$$