

Wahrscheinlichkeitstheorie Zusammenfassung (2/2)

Mittwoch, 10. April 2024

18:17

S2.60 (Linearität des Erwartungswerts)

Für ZV $X_1, \dots, X_n$ und $X := a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$E[X] = a_1 E[X_1] + \dots + a_n E[X_n]$$

S2.61 (Multiplikativität des Erwartungswerts)

Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ gilt

$$E[X_1 \cdot \dots \cdot X_n] = E[X_1] \cdot \dots \cdot E[X_n]$$

Beweis für $n=2$: (allgemein per Induktion)

$$\begin{aligned} E[X \cdot Y] &= \sum_{x \in \Omega_X} \sum_{y \in \Omega_Y} xy \cdot \Pr[X=x, Y=y] \stackrel{\text{Unabhängig.}}{=} \sum_{x \in \Omega_X} \sum_{y \in \Omega_Y} xy \cdot \Pr[X=x] \cdot \Pr[Y=y] \\ &= \sum_{x \in \Omega_X} x \cdot \Pr[X=x] \sum_{y \in \Omega_Y} y \cdot \Pr[Y=y] = E[X] \cdot E[Y] \end{aligned}$$

S2.62

Für unabhängige ZV $X_1, \dots, X_n$ und $X := X_1 + \dots + X_n$ gilt

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[X_1] + \dots + \text{Var}[X_n]$$

S2.65 (Waldsche Identität)

N und X seien zwei unabhängige ZV, wobei für den Wertebereich von N gilt: $\Omega_N \subseteq \mathbb{N}$.

Weiter sei $Z := \sum_{i=1}^N X_i$, wobei $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Kopien von X seien.

Dann gilt: $E[Z] = E[N] \cdot E[X]$

Beweis:

$$S2.32 \Rightarrow E[Z] = \sum_{n \in \Omega_N} E[Z|N=n] \cdot \Pr[N=n]$$

$$E[Z|N=n] = E[X_1 + \dots + X_n] = n \cdot E[X]$$

$$\Rightarrow E[Z] = \sum_{n \in \Omega_N} n \cdot E[X] \cdot \Pr[N=n] = E[X] \sum_{n \in \Omega_N} n \cdot \Pr[N=n] = E[X] \cdot E[N]$$

... S.189/140

S2.67 Ungleichung von Markov

Sei X eine ZV, die nur nicht-negative Werte annimmt. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$, dass

$$\Pr[X \geq t] \leq \frac{E[X]}{t}$$

Sei X eine ZV, die nur nicht-negative Werte annimmt. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$, dass

$$\Pr[X \geq t] \leq \frac{E[X]}{t}.$$

Oder äquivalent dazu $\Pr[X \geq t \cdot E[X]] \leq \frac{1}{t}$

Beweis:

$$E[X] = \sum_{x \in \Omega_X} x \cdot \Pr[X=x] \geq \sum_{x \in \Omega_X, x \geq t} x \cdot \Pr[X=x]$$

$$\geq t \cdot \sum_{x \in \Omega_X, x \geq t} \Pr[X=x] = t \cdot \Pr[X \geq t]$$

S2.68 Ungleichung von Chebyshev

Sei X eine ZV und $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$. Dann gilt

$$\Pr[|X - E[X]| \geq t] \leq \frac{\text{Var}[X]}{t^2}$$

oder äquivalent dazu $\Pr[|X - E[X]| \geq t \sqrt{\text{Var}[X]}] \leq \frac{1}{t^2}$

Beweis:

$$\Pr[|X - E[X]| \geq t] = \Pr[(X - E[X])^2 \geq t^2]$$

$$= \Pr[Y \geq t^2] \quad [Y := (X - E[X])^2]$$

$$\leq \frac{E[Y]}{t^2} = \frac{\text{Var}[X]}{t^2}$$