

Wahrscheinlichkeitstheorie Zusammenfassung (1/2)

Freitag, 29. März 2024 17:16

D2.1: diskreter Wahrscheinlichkeitsraum ist bestimmt durch eine Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$

von Elementarereignissen mit $0 \leq \Pr[\omega_i] \leq 1$ und $\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1$.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $E \subseteq \Omega$ ist definiert durch $\Pr[E] := \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega]$.

Komplementärereignis zu E : $\bar{E} := \Omega \setminus E$

L2.2: Für Ereignisse A, B gilt: 1. $\Pr[\emptyset] = 0, \Pr[\Omega] = 1$

2. $0 \leq \Pr[A] \leq 1$

3. $\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A]$

4. Wenn $A \subseteq B$, $\Pr[A] \leq \Pr[B]$

S2.3 (Additionssatz): Voraussetzung: Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ sind paarweise disjunkt

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] = \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$$

für unendliche Mengen von disjunkten Ereignissen analog:

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i]$$

S2.5 (Siebformel): Für Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) gilt:

$$\begin{aligned} \Pr\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_i \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_i}] \\ &= \sum_{i=1}^n \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}] - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] \end{aligned}$$

Spezialfall: $\Omega = A_1 \cup \dots \cup A_n$ mit $\Pr[\omega] = \frac{1}{|\Omega|}$

$$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_i \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_i}|$$

K2.6 (Boolesche Ungleichung, Union Bound): beschränkt die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung durch die

Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten.

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] \leq \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$$

Beweis: $B_i := A_i \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{i-1})$ für $i \geq 1$, $\Pr[B_i] \leq \Pr[A_i]$

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] = \Pr\left[\bigcup_{i=1}^n B_i\right] = \sum_{i=1}^n \Pr[B_i] \leq \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$$

Laplace: für alle Elementarereignisse ω gilt $\Pr[\omega] = \frac{1}{|\Omega|}$

für beliebige Ereignisse gilt $\Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}$

Lemma: Für die Ergebnismenge Ω gilt $|\Omega| = |\Omega|$

für beliebige Ereignisse gilt $\Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}$

Ergebnis des Zufallsexperiments auf Ω ist uniform verteilt/gleichverteilt

D2.8 $\Pr[A|B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$ mit $\Pr[B] > 0$

S2.10 (Multiplikationssatz): Falls $\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] > 0$ ist, gilt

$$\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \Pr[A_3|A_1 \cap A_2] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}].$$

Beweis: $\frac{\Pr[A_1]}{1} \cdot \frac{\Pr[A_2 \cap A_1]}{\Pr[A_1]} \cdot \frac{\Pr[A_3 \cap A_2 \cap A_1]}{\Pr[A_1 \cap A_2]} \cdot \dots \cdot \frac{\Pr[A_n \cap \dots \cap A_1]}{\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}]}$

B2.11 (Geburtstagsproblem): wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe mit n Personen (Balls-into-Bins)

zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben?

Forderung: $0 < m \leq n$ (ansonsten $\Pr = 1$ aufgrund Pigeonhole Principle)

$A_i :=$ Ball i landet in einem noch leeren Korb

$A :=$ Alle Bälle liegen allein in einem Korb

$$\Pr[A] = \Pr[\bigcap_{i=1}^m A_i] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \dots \cdot \Pr[A_m|\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i] \quad (\text{Multiplikationssatz})$$

$$\Pr[A_j|\bigcap_{i=1}^{j-1} A_i] = \frac{n-(j-1)}{n} = 1 - \frac{j-1}{n}$$

mit $1-x \leq e^{-x}$ und $\Pr[A_1] = 1$ gilt

$$\Pr[A] = \prod_{j=2}^m (1 - \frac{j-1}{n}) \leq \prod_{j=2}^m e^{-\frac{j-1}{n}} = e^{-\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m-1} j} = e^{-\frac{m(m-1)}{2n}}$$

S2.13 (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)

Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ seien paarweise disjunkt und es gelte $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$. Dann folgt

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^n \underbrace{\Pr[B|A_i]}_{\Pr[B \cap A_i]} \cdot \Pr[A_i] \quad (\text{analog für unendlich viele paarweise disjunkte Ereignisse})$$

Beweis: $B = (B \cap A_1) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j \neq i \Rightarrow (B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \emptyset$$

$$\Pr[B] = \Pr[B \cap A_1] + \dots + \Pr[B \cap A_n]$$

$$= \Pr[B|A_1] \cdot \Pr[A_1] + \dots + \Pr[B|A_n] \cdot \Pr[A_n]$$

S2.15 (Satz von Bayes): Seien die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ paarweise disjunkt und sei

$B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$ ein Ereignis mit $\Pr[B] > 0$. Dann gilt für ein beliebiges $i=1, \dots, n$

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^n \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]} \quad [\text{Condition für unendlich viele paarweise disjunkte Ereignisse}]$$

D2.18 Ereignisse A und B unabhängig $\Leftrightarrow \Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$

wenn $\Pr[B] > 0$, dann gilt $\Pr[A] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = \Pr[A|B]$

D2.22 Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ heißen unabhängig, wenn für alle Teilmengen $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit

$I = \{i_1, \dots, i_k\}$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_{i_k}].$$

Eine unendliche Familie von Ereignissen A_i mit $i \in \mathbb{N}$ heißt unabhängig, wenn diese Gleichung

für jede endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ erfüllt ist.

L2.23: Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ sind genau dann unabhängig, wenn für alle $(s_1, \dots, s_n) \in \{0, 1\}^n$ gilt, dass

$$\Pr[A_1^{s_1} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] = \Pr[A_1^{s_1}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] \quad \text{wobei } A_i^0 = \bar{A}_i \text{ und } A_i^1 = A_i.$$

Beweis: S. 106 (nicht ganz verstanden)

L2.24 Seien A, B und C unabhängige Ereignisse. Dann sind auch $A \cap B$ und C bzw.

$A \cup B$ und C unabhängig.

Beweis: $\Pr[(A \cap B) \cap C] = \Pr[A] \cdot \Pr[B] \cdot \Pr[C] = \Pr[A \cap B] \cdot \Pr[C]$

$$\Pr[(A \cup B) \cap C] = \Pr[(A \cap C) \cup (B \cap C)] = \Pr[A \cap C] + \Pr[B \cap C] - \Pr[A \cap B \cap C]$$

$$= \Pr[C] \cdot (\Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B])$$

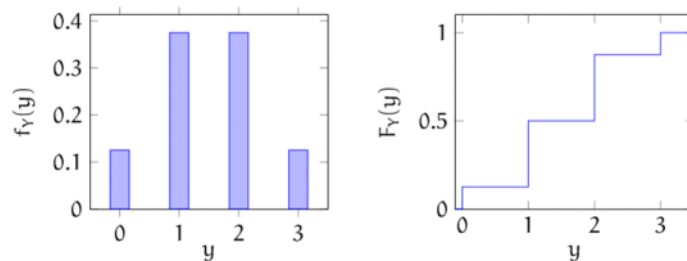
$$= \Pr[A \cap B] \cdot \Pr[C]$$

D2.25 Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, wobei Ω die Ergebnismenge eines Wahrscheinlichkeitsraumes ist.

Wertebereich einer ZV: $W_X := X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = x\}$

Dichtefunktion: $f_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, $x \mapsto \Pr[X=x]$

Verteilungsfunktion: $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, $x \mapsto \Pr[X \leq x] = \sum_{x \in W_X, x \leq x} \Pr[X=x]$



D2.27 Zu einer Zufallsvariablen X definieren wir den Erwartungswert $E[X]$ durch

$$E[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X=x],$$

trivialerweise
bei endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen erfüllt

sofern die Summe absolut konvergiert. Ansonsten sagen wir, dass der Erwartungswert undefiniert ist.

L2.29 Ist X eine Zufallsvariable, so gilt:

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega]$$

S.2.30 Sei X eine Zufallsvariable mit $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i]$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } E[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr[X=i] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^i \Pr[X=i] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} \Pr[X=i] = \sum_{j=1}^{\infty} \Pr[X \geq j] \end{aligned}$$

aus S.2.30 folgt die Markov-Ungleichung:

für alle ZV X mit $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$ und jedes $t > 0$ gilt: $\Pr[X \geq t] \leq \frac{1}{t} \cdot E[X]$

Bedingte Zufallsvariablen

S2.32 (analog zum Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit):

X Zufallsvariable, für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ mit $A_1 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ und

$\Pr[A_i] > 0$ gilt

$$E[X] = \sum_{i=1}^n E[X|A_i] \cdot \Pr[A_i] \quad [\text{analog für unendlichen Wahrscheinlichkeitsraum}]$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } E[X] &= \sum_{x \in \Omega_x} x \cdot \Pr[X=x] = \sum_{x \in \Omega_x} x \cdot \sum_{i=1}^n \Pr[X=x|A_i] \cdot \Pr[A_i] \\ &= \sum_{i=1}^n \Pr[A_i] \cdot \sum_{x \in \Omega_x} x \cdot \Pr[X=x|A_i] = \sum_{i=1}^n \Pr[A_i] \cdot E[X|A_i] \end{aligned}$$

S2.33 (Linearität des Erwartungswerts)

Für Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ und $X = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n + b$ mit $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$E[X] = a_1 E[X_1] + \dots + a_n E[X_n] + b$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } E[X] &= \sum_{i \in \Omega_x} i \cdot \Pr[X=i] = \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{i \in \Omega_x} i \cdot \Pr[X=i \cap \omega] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega] \\ E[X] &= \sum_{\omega \in \Omega} (a_1 X_1(\omega) + \dots + a_n X_n(\omega) + b) \cdot \Pr[\omega] \\ &= a_1 \left(\sum_{\omega \in \Omega} X_1(\omega) \cdot \Pr[\omega] \right) + \dots + a_n \left(\sum_{\omega \in \Omega} X_n(\omega) \cdot \Pr[\omega] \right) + b \quad \left[\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1 \right] \\ &= a_1 E[X_1] + \dots + a_n E[X_n] + b \end{aligned}$$

Beob. 2.35

Für ein Ereignis $A \subseteq \Omega$ ist die zugehörige Indikatorvariable X_A definiert durch:

$$X_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für den Erwartungswert von X_A gilt: $E[X_A] = \Pr[A]$.

Varianz

D2.39

Für eine Zufallsvariable X mit $\mu = E[X]$ definieren wir die Varianz $\text{Var}[X]$ durch

$$\text{Var}[X] := E[(X - \mu)^2] = \sum_{x \in \Omega_X} (x - \mu)^2 \cdot P[X=x].$$

Die Grösse $\sigma = \sqrt{\text{Var}[X]}$ heisst Standardabweichung von X .

S2.40

Für eine beliebige Zufallsvariable X gilt

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\text{Var}[X] &= E[(X - \mu)^2] = E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\ &= E[X^2] - 2\mu \cdot E[X] + \mu^2 = E[X^2] - E[X]^2\end{aligned}$$

S2.41

Für eine beliebige Zufallsvariable X und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\text{Var}[a \cdot X + b] = a^2 \cdot \text{Var}[X]$$

Beweis:

$$\text{Var}[X+b] = E[(X+b - E[X+b])^2] = E[(X - E[X])^2] = \text{Var}[X]$$

$$\text{Var}[a \cdot X] = E[(aX)^2] - E[aX]^2 = a^2 E[X^2] - (aE[X])^2 = a^2 \cdot \text{Var}[X]$$

D2.42

Für eine Zufallsvariable X nennen wir $E[X^k]$ das k -te Moment und $E[(X - E[X])^k]$

das k -te zentrale Moment

Wichtige diskrete Verteilungen

Bernoulli-Verteilung

Eine Zufallsvariable X mit $\Omega_X = \{0, 1\}$ und der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} p & \text{für } x=1 \\ 1-p & \text{für } x=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heisst Bernoulli-verteilt (p wird auch Erfolgswahrscheinlichkeit genannt).

man schreibt $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, es gilt:

$$E[X] = p \text{ und } \text{Var}[X] = p(1-p)$$

Binomialverteilung

Eine Zufallsvariable X mit $\Omega_X = \{0, 1, \dots, n\}$ und der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & x \in \{0, 1, \dots, n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt binomialverteilt mit Parameter n und p .

Man schreibt: $X \sim \text{Bin}(n, p)$.

Es gilt: $E[X] = n \cdot p$ und $\text{Var}[X] = np(1-p)$

Geometrische Verteilung

Wenn ein einzelner Versuch mit Wahrscheinlichkeit p gelingt, so ist die Anzahl der Versuche

geom. verteilt mit der Dichte

$$f_X(i) = \begin{cases} p(1-p)^{i-1} & \text{für } i \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

man schreibt: $X \sim \text{Geo}(p)$, es gilt:

$$E[X] = \frac{1}{p} \quad \text{und} \quad \text{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

S2.45:

Ist $X \sim \text{Geo}(p)$, so gilt für alle $s, t \in \mathbb{N}$:

$$\Pr[X \geq s+t | X > s] = \Pr[X \geq t]$$

Beweis: Verteilungsfunktion: $F_X(n) = 1 - (1-p)^n$

$$\Pr[X \geq n] = (1-p)^{n-1}$$

$$\Pr[X \geq s+t | X > s] = \frac{\Pr[X \geq s+t]}{\Pr[X > s]} = \frac{(1-p)^{s+t-1}}{(1-p)^s} = (1-p)^{t-1} = \Pr[X \geq t]$$

Negative Binomialverteilung

warten auf den n -ten Erfolg

$$f_Z(z) = \binom{z-1}{n-1} \cdot p^n \cdot (1-p)^{z-n}$$

$$E[Z] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{n}{p}$$

Coupon-Collector-Problem

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

X_i geom. verteilt mit $p = \frac{n-i+1}{n}$

$$E[X_i] = \frac{n}{n-i+1}$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = \sum_{i=1}^n \frac{n}{n-i+1} = n \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = n \cdot H_n$$

n-te harmonische Zahl

$$H_n = \ln(n) + O(1)$$

$$\Rightarrow E[X] = n \ln n + O(n)$$

Poisson-Verteilung

$$f_X(i) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} & \text{für } i \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$E[X] = \text{Var}[X] = \lambda$$

Man schreibt: $X \sim \text{Po}(\lambda)$

„Grenzwert der Binomialverteilung“

2.6 Mehrere Zufallsvariablen

$$\Pr[X=x, Y=y] = \Pr[\{\omega \in \Omega \mid X(\omega)=x, Y(\omega)=y\}]$$

$$f_{X,Y}(x,y) := \Pr[X=x, Y=y] \quad \text{gemeinsame Dichte}$$

$$f_X(x) = \sum_{y \in \Omega_Y} f_{X,Y}(x,y) \quad \text{bzw.} \quad f_Y(y) = \sum_{x \in \Omega_X} f_{X,Y}(x,y) \quad \text{Randdichten}$$

$$F_{X,Y}(x,y) := \Pr[X \leq x, Y \leq y] = \Pr[\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\}]$$

$$= \sum_{x' \leq x} \sum_{y' \leq y} f_{X,Y}(x',y') \quad \text{gemeinsame Verteilung}$$

$$F_X(x) = \sum_{x' \leq x} f_X(x') = \sum_{x' \leq x} \sum_{y \in \Omega_Y} f_{X,Y}(x',y) \quad \text{Randverteilung}$$

D2.52

Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ heißen unabhängig genau dann, wenn für

alle $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_{X_1} \times \dots \times \Omega_{X_n}$ gilt

$$\Pr[X_1=x_1, \dots, X_n=x_n] = \Pr[X_1=x_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n=x_n].$$

L2.53

Sind $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen und sind $S_1, \dots, S_n \in \mathbb{R}$ beliebige Mengen,

dann gilt $\Pr[X_1 \in S_1, \dots, X_n \in S_n] = \Pr[X_1 \in S_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n \in S_n]$

Beweis (s. Skript S. 133)

K2.54

Sind $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen und ist

$I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq [n]$, dann sind $X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$ ebenfalls unabhängig

Beweis (s. Skript S. 133)

S.255

Seien $f_1, \dots, f_n$ reellwertige Funktionen ($f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $i=1, \dots, n$).

Wenn die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ unabhängig sind, dann gilt dies

auch für $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$.

Beweis s. Skript

S.258

Für zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y sei $Z := X + Y$. Es gilt:

$$f_Z(z) = \sum_{x \in \Omega_X} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \Pr[Z=z] = \sum_{x \in \Omega_X} \Pr[X+Y=z | X=x] \cdot \Pr[X=x] \\ &= \sum_{x \in \Omega_X} \Pr[Y=z-x] \cdot \Pr[X=x] = \sum_{x \in \Omega_X} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) \end{aligned}$$