Zusammenhang

G ist zusammenhängend, wenn $\forall u,v \in V, u \neq v$, gilt:
Es gibt einen u-v-Pfad in G

G ist k-zusammenhängend, falls $|V| \geq k+1$ und $\forall X \subseteq V$ mit $|X| < k$ gilt: $G[V \setminus X]$ ist zusammenhängend

falls G zusammehängend ist und $G[V \setminus X]$ nicht, dann ist X ein (Knoten-)Seperator

k zusammenhängend → k-1 zusammenhängend

G ist k-kanten-zusammenhängend, falls $\forall X \subseteq E$ mit $|X| < k$ gilt:
Der Graph $(V, E \setminus X)$ ist zusammenhängend

Knotenzusammenhang ≤ Kantenzusammenhang ≤ min. Knotengrad

Satz von Menger

Sei $G=(V,E)$ ein Graph und $u,v \in V$, $u \neq v$. Dann gilt:

a) Jeder u-v-Knotenseperator hat Grösse mind. k ⟺
Es gibt mind. k intern-knotendisjunkte u-v-Pfade

b) Jeder u-v-Kantenseperator hat Grösse mind. k ⟺
Es gibt mind. k ~~intern~~ kantendisjunkte u-v-Pfade

Artikulationsknoten und Brücken

Artikulationsknoten v := Sei G zusammenhängend.
$G[V \setminus \{v\}]$ ist nicht mehr zusammenhängend.

Brücke e := Sei G zusammenhängend, $G[E \setminus \{e\}]$ ist es nicht mehr.

Lemma: Sei G zusammenhängend. ist $\{x,y\} \in E$ eine Brücke, so gilt für x (analog für y):
$\deg(x)=1$ oder x ist Artikulationsknoten

um Artikulationsknoten zu finden, nutzen wir DFS

$$v \text{ Artikulationsknoten} \iff \begin{cases} v = s & \text{und } s \text{ hat in } T \text{ Grad} \geq 2 \\ v \neq s & \text{und } \exists w \in V \text{ mit } \{v,w\} \in E(T) \text{ und } low[w] \geq DFS[v] \end{cases}$$

Vorwärtskanten := alle Kanten des Tiefensuchbaums T
Rückwärtskanten := alle anderen Kanten, die nicht in T sind

low[v] := kleinste DFS-Nummer, die von v durch einen Pfad von beliebig vielen Vorwärts- und einer Rückwärtskante erreicht werden kann

eine gerichte Kante des Tiefensuchbaums $\{v,w\}$ ist eine Brücke
$\Leftrightarrow$ $low[w] > dfs[v]$

alle low-Werte sind in Zeit $O(|V|+|E|)$ mit DP berechenbar:

$$low[v] = \min\left(dfs[v], \min_{(v,w)\in E} \begin{cases} dfs[w] & \text{falls } (v,w) \text{ Restkante} \\ low[w] & \text{falls } (v,w) \text{ Baumkante} \end{cases}\right)$$

→ Knoten mit höchster DFS-Nummer ist Base Case
→ Berechnung möglich in absteigender DFS-Folge

Satz: Für zusammenhängende Graphen $G=(V,E)$, die in Adjazenz-liste gespeichert ist, lassen sich Artikulationsknoten und Brücken in Zeit $O(E)$ berechnen.
($|V|$ durch E aufgrund Zusammenhang beschränkt, $|V| \leq |E|-1$)

Blöcke

Definition: Sei $G=(V,E)$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf E durch

$$e \sim f \Leftrightarrow \begin{cases} e=f \text{ oder} \\ \exists \text{ Kreis durch } e \text{ und } f \end{cases}$$

Äquivalenzklassen sind Blöcke

Beweis der Transitivität:

$e=\{u_e,v_e\}$, $f=\{u_f,v_f\}$, $g=\{u_g,v_g\}$ und $e\sim f$ und $f\sim g$ und e,f,g paarweise verschieden

Einfügen von „Mittelknoten" w_e, w_f und w_g
→ zwei intern Knoten-disjunkte Wege von w_e nach w_f und w_f nach w_g
→ Menger: keinen w_e-w_f-Seperator der Grösse 1 (analog w_f-w_g)
→ keinen w_e-w_g-Seperator der Grösse 1
→ e und g liegen auf einem Kreis $\Rightarrow e \sim g$

G ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$ Blockgraph ist Baum

Zwei Blöcke schneiden sich (wenn überhaupt) immer in einem Artikulationsknoten

Der Blockgraph von G ist der bipartite Graph $T=(A \uplus B, E_T)$ mit $A=\{$Artikulationsgraphen von G$\}$ und $B=\{$Blöcke von G$\}$

G zusammenhängend und nur gerade Grade
$\Downarrow \not\Uparrow$
G zwei-kantenzusammenhängend

G enthält einen Hamiltonkreis
$\Downarrow \not\Uparrow$
G ist 2-zusammenhängend

Kreise

Eine Eulertour in einem Graphen $G=(V,E)$ ist ein geschlossener Weg, der jede Kante des Graphens genau einmal enthält. Enthält ein Graph eine Eulertour, so nennt man ihn eulersch.

Algorithmusidee zum Finden einer Eulertour: schneller/langsamer Läufer

Satz: a) Ein zusammenhängender Graph $G=(V,E)$ ist genau dann eulersch, wenn der Grad aller Knoten gerade ist.
b) In einem zusammenhängenden, eulerschen Graphen kann man eine Eulertour in Zeit $O(|E|)$ finden.

Ein Hamiltonkreis in einem Graphen $G=(V,E)$ ist ein Kreis, der alle Knoten von V genau einmal durchläuft. Enthält ein Graph einen Hamiltonkreis, so nennt man ihn hamiltonsch.

Finden eines Hamiltonkreis ist NP-vollständig

DP-Ansatz: $P_{S,x} := \begin{cases} 1, & \text{es gibt einen } 1\text{-}x\text{-Pfad, der genau die Knoten von } S \text{ enthält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

es gibt einen Hamiltonkreis $\Leftrightarrow \exists x \in N(1)$ mit $P_{[n],x} = 1$

Base Case: $P_{S,x} = 1$ mit $S = \{1,x\}$ falls $\{1,x\} \in E$

Rekursion: $P_{S,x} = \max\{P_{S\setminus\{x\},x'} \mid x' \in S \cap N(x),\ x' \neq 1\}$

→ Speicher: $O(n \cdot 2^n)$, Laufzeit: $O(n^2 \cdot 2^n)$

Spezialfälle:

→ Gittergraphen $m \times n$, wenn $m \cdot n$ gerade
→ d-dimensionale Hyperwürfel mit $d \geq 2$
→ Ikosaeder

Lemma:
Ist $G=(A \uplus B, E)$ ein bipartiter Graph mit $|A| \neq |B|$, so kann G keinen Hamiltonkreis enthalten.

Satz von Dirac:
Wenn $G=(V,E)$ ein Graph mit $|V| \geq 3$ Knoten ist, in dem jeder Knoten mindestens $\frac{|V|}{2}$ Nachbarn hat, dann ist G hamiltonsch.

Beweis durch Widerspruch:
→ G ist zusammenhängend
→ Annahme: $P = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ Pfad mit meisten Kanten in G
→ es muss $2 \leq i \leq k$ geben, sodass $v_i \in N(v_1)$ und $v_{i-1} \in N(v_k)$, da jeder mind. $\frac{|V|}{2}$ Nachbar
→ $\langle v_1, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, v_2 \rangle$ ist dann ein Kreis der Länge k
→ per Annahme kein Hamiltonkreis, also $k < n \Rightarrow$ es gibt Knoten außerhalb $\hat{v}$
→ Zusammenhang $\Rightarrow \hat{v}$ muss mit einem Knoten verbunden sein
→ das + P = Pfad der Länge $k+1$ → ↯

→ man kann dann einen Hamiltonkreis in $O(|V|^2)$ finden

Travelling Salesman Problem

gegeben: vollständiger Graph auf n Knoten, Distanzen zwischen je zwei Knoten: $\ell: \binom{[n]}{2} \to \mathbb{R}$

gesucht: kürzeste Rundreise: $H: \min_{\text{Hamiltonkreis}} \sum_{e \in E(H)} \ell(e)$

Reduktion ~~auf~~ von Hamiltonkreisproblem
→ alle ursprünglichen Kanten bekommen Gewicht 0, alle zusätzlichen 1
→ falls TSP Gewicht 0 hat, gibt es einen Hamiltonkreis im ursprünglichen Graphen
→ TSP ist NP-vollständig

Satz: Gibt es ein für $\alpha > 1$ einen α-Approximationsalgorithmus ($\sum_{e \in C} \ell(e) \leq \alpha \cdot opt(K_n, \ell)$) für das TSP mit Laufzeit $O(f(n))$, so gibt es auch einen Algorithmus, der für alle Graphen auf n Knoten in Laufzeit $O(f(n))$ entscheidet, ob sie hamiltonsch sind. (Beweis durch $opt(K_n, \ell) = 0$

METRISCHES TRAVELLING SALESMAN PROBLEM

zusätzliche Annahme: ℓ ist nicht-negativ und erfüllt die Dreiecksungleichung: $\ell(x,z) \leq \ell(x,y) + \ell(y,z) \;\; \forall x,y,z \in [n]$

Satz: Für das metrische TSP gibt es einen 2-Approximationsalgorithmus mit Laufzeit $O(n^2)$.

Algorithmus:

1. Bestimme minimalen Spannbaum T, es gilt: $\ell(T) \leq opt(K_n, \ell)$
2. Verdopple alle Kanten von T, es gilt: $2 \cdot \ell(T) \leq 2 \cdot opt(K_n, \ell)$
3. Bestimme Eulertour W, es gilt: $\ell(W) = 2\ell(T) \leq 2 opt(K_n, \ell)$
4. Durchlaufe W mit Abkürzungen, so dass jeder Knoten nur einmal besucht wird ⇒ Hamiltonkreis C
   es gilt: $\ell(C) \leq \ell(W) = 2\ell(T) \leq 2 opt(K_n, \ell)$

3/2 – Approximation für MST in $O(n^3)$

1. Berechnung MST + ~~Verdoppeln der Kanten~~ Modifikation
2. Eulertour
3. Eulertour abkürzen

Modifikation:
- gewichtsminimales perfektes Matching M finden (nur für Knoten mit ungeradem Grad)
- $T \cup M$ → alle Knoten haben geraden Grad

Matchings

Matching $M \subseteq E$, falls kein Knoten von G zu mehr als einer Kante aus M inzident ist, formal: $e \cap f = \emptyset \quad \forall e,f \in M$ mit $e \neq f$

Ein Knoten $v \in V$ wird von M **überdeckt**, falls es eine Kante in M gibt, die v enthält.

perfektes Matching := jeder Knoten wird von genau einer Kante aus M überdeckt, also $|M| = \frac{|V|}{2}$

inklusionsmaximal := $M \cup \{e\}$ ist kein Matching $\forall e \in E \setminus M$
$\rightarrow \nexists M'$ mit $M \subseteq M'$ und $|M'| > |M|$

(kardinalitäts-) maximal := es gibt kein Matching M' mit $|M'| > |M|$

GREEDY-MATCHING(G)
  $M \leftarrow \emptyset$
  while $E \neq \emptyset$ do
    wähle eine beliebige Kante $e \in E$
    $M \leftarrow M \cup \{e\}$
    lösche e und alle inzidenten Kanten in G

Satz: GREEDY-MATCHING bestimmt in $O(|E|)$ ein inklusionsmaximales Matching M_{Greedy} für das gilt:

$$|M_{Greedy}| \geq \frac{1}{2} \cdot |M_{max}|$$

(M_{max}: kardinalitätsmax. Matching)

Beweis: $M_{Greedy} \oplus M_{max} := (M_{Greedy} \cup M_{max}) / (M_{Greedy} \cap M_{max})$

M_{Greedy} inklusionsmax. $\Rightarrow$ jede Kante aus M_{max} muss mind. eine Kante aus M_{Greedy} berühren

M_{max} Matching $\Rightarrow$ jeder Knoten aus M_{Greedy} $(= |M_{Greedy}| \cdot 2)$ kann nur eine Kante von M_{max} berühren

$\Rightarrow |M_{max}| \leq 2 \cdot |M_{Greedy}|$

Eigenschaften Graph mit M_{Greedy} und M_{max}

→ Knoten mit Grad ≤ 2
→ enthält nur Kreise gerader Länge und Pfade mit mehr Kanten von M_{max} als M_{Greedy}
→ wenn $|M_{max}| - |M_{Greedy}| = k$ → k unterschiedliche Pfade

Matching vergrößern? → Konzept der augmentierenden Pfade

Satz von Berge:

Ist M ein matching in einem Graphen, das nicht kardinalitätsmaximal ist, so existiert ein augmentierender Pfad zu M.

In einem bipartiten Graphen kann ein kardinalitätsmaximales matching in $O(|V| \cdot |E|)$ gefunden werden.
→ Finden der augmentierenden Pfade mit modifizierter Breitensuche in $O(|V|+|E|)$
→ maximale Kardinalität $\frac{n}{2} = O(|V|) \Rightarrow O(|V| \cdot |E|)$

State of the Art matching:
$O(|E|^{1+o(1)})$ für bipartite Graphen
$O(\sqrt{|V|} \cdot |E|)$ für generelle Graphen

Satz von Hall (Heiratssatz)

Ein bipartiter Graph $G=(A \uplus B, E)$ enthält ein matching M mit Kardinalität $m=|A|$ genau dann wenn
$\forall X \subseteq A: |X| \leq |N(X)|$

Beweis:
"⇒" in jedem durch M gegebenen Teilgraphen hat $X \subseteq A$ genau $|X|$ Nachbarn; da $M \subseteq E$ gilt $|N(X)| \geq |X|$ für alle $X \subseteq A$

"⇐" Beweis über Induktion
Case ①: $\forall X \subseteq A. |X| < |N(X)|$
wähle beliebige Kante $e=\{x,y\}$, lösche x,y und alle inzidenten Kanten
G': $|A_G|-1 = |A_{G'}|$
$\Rightarrow \forall X' \subseteq A_{G'}: |X'| \leq |N_G(X')|$ G' gilt Hall-Bedingung
I.H. ⇒ matching M' in G', $M = M' \cup \{e\}$ matching in G
Case ②: $\exists X \subseteq A, X \neq \emptyset, |X| = |N(X)|$
Idee: Induzierter Teilgraph in X und $N(X)$ erfüllt die Hall-Bed.
$A \setminus X$ und $B \setminus N(X)$ erfüllen auch die Hall-Bedingung

Satz von Frobenius

Jeder k-reguläre bipartite Graph enthält ein perfektes Matching.
Beweis: es gibt kein $X \subseteq A$ sodass $|X| > |N(X)|$
Annahme: aus X gehen $k|X|$ Kanten aus → pigeonhole: mind. ein Knoten müsste Grad $> k$ haben, wenn $|N(X)| < |X|$

noch stärkere Aussage: Graph ist Vereinigung von perfekten matchings
→ löscht man an jedem Knoten eine Kante ⇒ $k-1$ regulärer Graph

Satz: In 2^k-regulären Graphen kann man in Zeit $O(|E|)$ ein perf. Matching finden.
→ rekursive Idee: jede zweite Kante der Eulertour löschen ⇒ 2^{k-1} regulären Graphen
→ Base Case: 2 regulärer Graph, der aus Kreisen gerader Länge besteht
→ Berechnung einer Eulertour mit $|E|=m$ braucht $C \cdot m$
$C \cdot (m + \frac{m}{2} + \frac{m}{4} + \ldots) \leq Cm \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^i = 2 \cdot Cm = 2|E|$

Satz: In k-regulären bipartiten Graphen kann man in Zeit $O(E)$ ein perfektes Matching bestimmen. (Beweis nicht behandelt)

Hopcroft-Karp

mit BFS in bipartiten Graphen kann man auch eine inklusionsmax. Menge kürzester augmentierender Pfade finden (in $O(|V|+|E|)$)

so erhält man Menge S mit:
- alle Pfade in S haben selbe minimale Länge k
- alle Pfade in S sind paarweise disjunkt
- S ist inklusionsmaximal

da alle Pfade disjunkt → parallel augmentieren, denn ~~jeder~~ ein augmentierender Pfad überdeckt/unüberdeckt ja nur Knoten auf P

MAXIMAL_MATCHING($G=(A \uplus B, E)$) (Hopcroft-Karp)

```
M:={e} für irgendein e∈E
while es gibt noch augmentierende Pfade do
  k:= Länge eines kürzesten augmentierenden Pfades
  Finde eine inklusionsmax. Menge S von paarweise disjunkten
  augmentierenden Pfaden der Länge k.
  for alle P aus S do
    M:=M⊕P
return M
```

Satz: Der Algorithmus von Hopcroft-Karp durchläuft die while-Schleife nur $O(\sqrt{|V|})$ mal. Er berechnet daher ein maximales Matching in einem bipartiten Graphen in Zeit $O(\sqrt{|V|}\cdot(|V|+|E|))$.

Beweis: 1) Ist P ein kürzester augmentierender Pfad von M und P' ein augmen. Pfad für $M\oplus P$, so gilt

$$|P'| \geq |P| + 2\cdot|P\cap P'|$$

Beweis von 1): $\tilde{M} := M\oplus P\oplus P'$, dann $|\tilde{M}| = |M|+2$
→ $\tilde{M}\oplus M$ muss mind. 2 disjunkte M augmentierende Pfade haben
→ P kürzester, also beide mind. Länge $|P|$
→ $M\oplus\tilde{M} = M\oplus M\oplus P\oplus P' = P\oplus P'$

$|P\oplus P'| = |M\oplus\tilde{M}| \geq 2\cdot|P|$ mit $|P\oplus P'| = |P\cup P'| - |P\cap P'| = |P|+|P'| - 2|P\cap P'|$

$\Rightarrow |P|+|P'|-2|P\cap P'| = |P\oplus P'| \geq 2|P|$

2) mit jedem Durchlauf der while-Schleife erhöht sich k um mind. 2

Beweis von 2):

3) M hat kürzesten augmentierenden Pfad der Länge k, sei M' ein beliebiges anderes Matching, dann

$$|M'| \leq |M| + \frac{|V|}{k+1}$$

Beweis: Annahme: $|M'| > |M|$ (ansonsten trivial)

→ $M \oplus M'$ hat mind. $|M'|-|M|$ disjunkte M augment. Pfade mit mind. Länge k also mind. $k+1$ Knoten

→ zusammen auf den Pfaden also mind. $(|M'|-|M|) \cdot (k+1) \leq |V|$

(1)+(2)+(3) ⇒ (2) ⇒ nach den ersten $\lceil \frac{\sqrt{|V|}}{2} \rceil$ Durchläufen der while-Schleife gilt $k \geq \sqrt{|V|}$

(3) ⇒ $|M_{max}| \leq |M| + \frac{|V|}{k+1} \leq |M| + \sqrt{|V|}$

⇔ $|M| \geq |M_{max}| - \sqrt{|V|}$

da sich mit jedem weiteren Durchlauf k um mind. 1 erhöht, gilt nach max. $\sqrt{|V|}$ weiteren Durchläufen $|M| = |M_{max}|$. ■

Weitere Matching-Algorithmen

Satz: Ist n gerade und $e: \binom{[n]}{2} \to \mathbb{N}_0$ eine Gewichtsfunktion des vollst. Graphen K_n, so kann man in $O(n^3)$ ein minimales perfektes Matching finden.

Satz: Für das metrische TSP gibt es einen $\frac{3}{2}$-Approximationsalgorithmus mit Laufzeit $O(n^3)$.

Beweis:

Färbungen

Chromatische Zahl $\chi(G)$:= minimale Anzahl Farben, die für eine Knotenfärbung von G benötigt wird

Vierfarbensatz: Jede Landkarte (planarer Graph) lässt sich mit 4 Farben färben.

$\chi(G) \leq k \iff G$ ist k-partit

Satz: Das Problem „Gegeben ein Graph $G=(V,E)$, gilt $\chi(G) \leq 3$?" ist NP-vollständig.
Einen gegebenen 3-färbbaren Graphen kann man in Zeit $O(|E|)$ mit $O(\sqrt{n})$ Farben färben.

Beweis: $v \in V$, $G=(V,E)$ 3-färbbar, so ist der durch die Nachbarschaft induzierte Subgraph $G[N(v)]$ bipartit.
solange Knoten mit „großem" Grad ($\sqrt{n}$) → ihn und Nachbarschaft mit 3 Farben färben, auf den Rest Brooks anwenden
→ max. $\frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ Knoten nach der ersten Regel (mit max. $3\sqrt{n}$ Farben)
→ Anwendung Brooks auch max. $\sqrt{n}$ Farben

GREEDY-FÄRBUNG(G) ← läuft in $O(|E|)$, falls in Adjazenzliste gespeichert

```
wähle eine beliebige Reihenfolge der Knoten: V = {v_1, ..., v_n}
c[v_1] ← 1
for i=2 to n do
    c[v_i] ← min{k ∈ ℕ | k ≠ c(u) für alle u ∈ N(v_i) ∩ {v_1, ..., v_{i-1}}}
```

→ für jede Reihenfolge der Knoten benötigt der Greedy-Algorithmus höchstens $\Delta(G)+1$ Farben

<u>Heuristik</u>

v_n := Knoten vom kleinsten Grad, lösche v_n
v_{n-1} := Knoten vom kleinsten Grad im Restgraph, lösche v_{n-1}

Korollar: Heuristik findet immer eine Färbung mit 2 Farben für Bäume.
Satz (ohne Beweis): Ist ein Graph planar, so gibt es immer einen Knoten mit Grad ≤ 5
Korollar: Heuristik findet eine Färbung mit ≤ 6 Farben für planare Graphen

Korollar: G zusammenhängend, $\exists v \in V$ mit $\deg(v) < \Delta(G)$
→ Heuristik oder BFS/DFS liefert Reihenfolge, für die Greedy höchstens $\Delta(G)$ Farben benötigt

Satz von Brooks

$G \neq K_n$, $G \neq C_{2n+1}$, G zusammenhängend:

$\chi(G) \leq \Delta(G)$

$\Rightarrow$ G kann in $O(|E|)$ mit $\Delta(G)$ Farben gefärbt werden

<u>Algorithmus:</u>

- falls $\Delta(G) = 2$ (G also Pfad oder gerader Kreis), färbe mit zwei Farben
- falls $\exists v \in V$ mit $\deg(v) < \Delta(G)$: färbe mit Greedy + Heuristik
- falls $\exists$ Artikulationsknoten: färbe Blöcke mit Heuristik, ggf. Farbentausch
- bestimme $v, x, y \in V$ mit $x, y \in N(v)$ und $\{x,y\} \notin E$
- betrachte $G' = G[V \setminus \{x,y\}] \rightarrow$ rekursiv

<u>Beweis des Satzes von Brooks</u>

Annahme: $G \neq K_n$, $G \neq C_{2n+1}$, keine Artikulationsknoten, zusammenhängend
es muss v geben, der Nachbarn $v_1, v_2 \in N(v)$ mit $v_1 \neq v_2$ und $\{v_1, v_2\} \notin E$ hat
(da G zusammenhängend, aber nicht vollständig)

Fall 1: $G \setminus \{v_1, v_2\}$ zusammenhängend
$\rightarrow$ DFS von v, dann Sortierung v_1, v_2, restliche in umgekehrter DFS-Reihenfo
$\rightarrow$ Greedy färbt in $\Delta(G)$

Fall 2: $G \setminus \{v_1, v_2\}$ nicht zusammenhängend
Seien $V_1, \ldots, V_s$ die Knotenmengen der ZHKs
Fall A: alle $G_i = G[V_i \cup \{v_1, v_2\}]$, $1 \leq i \leq s$ haben max. Grad $\Delta(G)-2$
$\rightarrow$ jeweils Kante $\{v_1, v_2\}$ hinzufügen und färben
Fall B: $\sum \deg(v_1) \leq \Delta(G)$, daher $\deg(v_1)$ und $\deg(v_2)$ in $G_i \leq 1$
$\rightarrow$ wenn der Grad $=0$, wäre der andere Knoten Artikulationsknoten ξ
$\rightarrow$ $s = 2$ und v_1 und v_2 haben jeweils exakt 1 Nachbarn u_1 und u in G_i
$\rightarrow$ G_1 und G_2 mit Greedy färben
$\rightarrow$ ...

Satz: Ist $G = (V,E)$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass jeder induzierte Subgraph von G einen Knoten mit Grad höchstens k enthält, so gilt $\chi(G) \leq k+1$ und eine $(k+1)$-Färbung lässt sich in Zeit $O(|E|)$ finden.