Wahrscheinlichkeitstheorie

Kombinatorik

Wie viele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus einer n-elementigen Menge zu ziehen?

	geordnet	ungeordnet
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Zurücklegen	$n^{\underline{k}}$	$\binom{n}{k}$

$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

ungeordnet, mit Zurücklegen (Multimenge) (Beispiel für k=5, n=7)

1 1 | | | 4 | | 6 6 |

kein Platz für 2 kein Platz für 3 kein Platz für 5 kein Platz für 7

Trick:
1) Füge n-1 Zusatzplätze ein, sodass insgesamt n+k-1 Plätze zur Verfügung stehen.
2) Wähle n-1 der Plätze aus und schreibe | auf diese Plätze. → n Bereiche
3) Fülle den ersten Bereich mit "1" aus, den zweiten mit "2", usw.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Mit diesem Trick wird jede Möglichkeit exakt einmal gezählt! → $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{n+k-1-(n-1)} = \binom{n+k-1}{k}$

Aufgaben:

1. Wieviele ungeordnete Paare mit Elementen in $\{1,2,3\}$ gibt es?

   3 $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$

2. Ein Rosenverkäufer verkauft Rosen drei verschiedener Farben. Wieviele Möglichkeiten gibt es, einen Blumenstrauss aus fünf Rosen zusammenstellen?

   $\binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$

3. Seien A und B zwei endliche Mengen mit $|A|=m$ und $|B|=n$. Wie viele unterschiedliche Mappings können wir von A auf B definieren, $f: A \to B$?

   $\longrightarrow n^m$

   $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ $f(a_1)$ haben wir n verschiedene Mögeichkeiten

Beispiel: Würfelwurf

$\{1,2,3,4,5,6\}^2$

$\{ \quad \} \times \{ \quad \}$

$\{2,4,6\}$

$\{1,3,5\}$

Definitionen

Ergebnismenge Ω: Menge von Elementarereignissen

Ereignis $E \subseteq \Omega$: eine Teilmenge von allen Elementarereignissen

Komplementärereignis $\bar{E} := \Omega \setminus E$

Laplace-Raum: Endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, in dem alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind:

$\forall \omega \in \Omega: Pr[\omega] = \frac{1}{|\Omega|}$, $Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}$

bedingte W'keit: A, B Ereignisse, $Pr[B] > 0$.

$$Pr[A|B] = \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]}$$

Lemma: Für Ereignisse A, B gilt:

1. $Pr[\emptyset] = 0$, $Pr[\Omega] = 1$
2. $0 \leq Pr[A] \leq 1$
3. $Pr[\bar{A}] = 1 - Pr[A]$
4. Wenn $A \subseteq B$, so folgt $Pr[A] \leq Pr[B]$ (Monotonie)

Additionssatz: $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$

$$Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Pr[A_i]$$

Union Bound: $Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{n} Pr[A_i]$

Aufgabe:

Finden Sie für jede der vier folgenden Teilaufgaben einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr[\cdot])$ und Ereignisse $A, B, \dots \subseteq \Omega$ die die vorgeschriebenen Eigenschaften erfüllen, oder beweisen Sie dass kein solcher Wahrscheinlichkeitsraum existiert.

(i) $\Pr[A] = \frac{1}{4}$, $\Pr[B] = \frac{1}{3}$ and $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B]$.

(ii) $\Pr[A] = \frac{1}{4}$, $\Pr[B] = \frac{1}{3}$ and $\Pr[A \cup B] < \Pr[A] + \Pr[B]$.

(iii) $\Pr[A] = \Pr[B]$, $\Pr[A \cap B] = \frac{1}{4}$, and $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$ (d.h. A und B sind unabhängig).

(iv) $\Pr[A] = \Pr[B] = \Pr[C] = \frac{5}{6}$ and $\Pr[A \cap B \cap C] = 0$.

(i) $\Omega = \{1, \ldots, 12\}$

$A = \{1,2,3\}$ $\quad B = \{4, \ldots, 7\}$

(ii) $A = \{1,2,3\}$ $\quad B = \{3, \ldots, 6\}$ $\quad Pr[A \cup B] = \frac{1}{2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$

(iii) $A = \{1, \ldots, 6\}$ $\quad B = \{2,4,6,8,10,12\}$ $\quad A \cap B = \{2,4,6\}$

$Pr[A] = Pr[B] = \frac{1}{2}$ $\quad Pr[A \cap B] = \frac{1}{4}$

(iv) $Pr[A \cap B \cap C] = 1 - Pr[\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}]$

$\underset{\text{Union Bound}}{\geq} 1 - Pr[\bar{A}] - Pr[\bar{B}] - Pr[\bar{C}] > 0$

Wir ziehen dreimal ohne Zurücklegen aus einer Urne mit 3 roten und 4 blauen Kugeln. Was ist die W'keit, dass alle gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben?

$$\frac{\cancel{3}}{7}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{6}_1}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{7}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{2}^1}{5} = \frac{1}{35}+\frac{4}{35}=\frac{1}{7}$$

Sei B_n das Ereignis, dass ein zufällig generierter Graph $G(n,p)$ mind. einen isolierten Knoten besitzt. Finde eine möglichst gute obere Schranke für $Pr[B_n]$.

$|V|$ — W'keit dass eine Kante existiert

$A_i :=$ i-te Knoten isoliert $\qquad B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad Pr[A_i] = (1-p)^{n-1}$

$$Pr[B_n] \leq \sum_{i=1}^{n} Pr[A_i] = n\cdot(1-p)^{n-1}$$

Sie und Ihre beiden Freunde haben drei vegane Hot-Dogs. Einer davon ist volkommen unversehrt, einer davon ist auf (genau) einer Seite angebissen und der dritte ist von beiden Seiten angebissen. Um die Hot-Dogs fair aufzuteilen, wird Ihnen einer der drei Hot-Dogs zufällig zugeteilt. Sie sehen ein zufälliges Ende Ihres Hot-Dogs und freuen sich, dass es nicht angebissen ist. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie Glück haben, und Sie den vollkommen unversehrten Hot-Dog erhalten haben?

$$Pr[A|B] = \frac{Pr[A\cap B]}{Pr[B]}$$

$\Omega = H\times S$

$H = \{0,1,2\}$ ← # angebissene Enden

$Pr[\omega] = \frac{1}{6} \quad \forall \omega\in\Omega$

$S = \{L,R\}$

$A :=$ wir haben einen unangebissenen Hotdog

$B :=$ mind. eine Seite nicht angebissen

$$Pr[A|B] = \frac{\frac{|\{\{0,L\},\{0,R\}\}|}{6}}{\frac{|\{\{0,L\},\{0,R\},\{1,L\}\}|}{6}} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

David wirft sehr gerne Münzen. Immer wenn er die Folge Zahl, Kopf, Kopf, Zahl (direkt aufeinanderfolgend) sieht, freut er sich besonders, da $ZKKZ$ seine Lieblingsfolge ist. Angenommen David wirft seine Münze 10 mal. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass seine Lieblingsfolge in den 10 Würfen vorkommt? Genauer gesagt, bezeichnen wir mit $M_1, \ldots, M_{10}$ die Ergebnisse der 10 Münzwürfe und möchten die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass es ein $i \in \{1, 2, \ldots, 7\}$ gibt, sodass

$$M_i = Z,\ M_{i+1} = K,\ M_{i+2} = K,\ M_{i+3} = Z. \tag{1}$$

Hinweis: Für $i = 1, \ldots, 7$ sei E_i das Ereignis, dass (1) für i eintritt. Was ist $Pr[E_1 \cup \ldots \cup E_7]$? Verwenden Sie das Inklusions-Exklusions-Prinzip. ← Siebformel

detaillierte Erklärung leider nur an der Tafel

E_i erfüllt $\Rightarrow E_{i+1}, E_{i+2}$ nicht erfüllt

$$Pr\left[\bigcup_{i=1}^{7} E_i\right] = \sum_{i=1}^{7} Pr[E_i] - \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=i+3}^{7} Pr[E_i\cap E_j] + Pr[E_1\cap E_4\cap E_7]$$

$$= 7\cdot\frac{1}{2^4} - 4\cdot 2^3\cdot\frac{1}{2^{10}} - 6\cdot 2^2\cdot\frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{10}}$$

$$= 7\cdot\frac{1}{2^4} - 4\cdot\frac{1}{2^7} - 6\cdot\frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{10}} = \frac{393}{1024} \approx 0{,}38$$

Oliver besitzt drei Paar Schuhe, zwei schwarze und ein weisses. Eines Morgens muss er seine Schuhe aufgrund eines Stromausfalls in vollständiger Dunkelheit anziehen. Er wählt zwei Schuhe zufällig (gleichverteilt, ohne zurücklegen) aus.

Sei A das Ereignis, dass er einen linken und einen rechten Schuh ausgewählt hat. Sei B das Ereignis, dass er zwei Schuhe der selben Farbe ausgewählt hat.

Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum an, der dass Zufallsexperiment beschreibt und berechnen Sie $\Pr[A]$ und $\Pr[A|B]$.

Nummeriere Schuhe: $\underbrace{1, 2}_{\text{1. schwarzes Paar}}, \overbrace{3, 4}^{\text{2. schwarzes Paar}}, \underbrace{5, 6}_{\text{weißes Paar}}$ ungerade Zahlen $\hat{=}$ linke Schuhe

$\binom{6}{2}$ mögliche Schuhkombis

$\Pr[A] = \frac{3}{5}$ (erster Schuh frei wählbar, für zweiten noch 3 von 5 Optionen)

$$\Pr[A|B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\frac{5}{15}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{\frac{5}{17}}{\frac{7}{15}} = \frac{5}{7}$$

Sie nehmen an einer Quizshow mit 'Ja/Nein'-Fragen teil und wissen, dass die Fragen zufällig ausgewählt werden und Sie mit Wahrscheinlichkeit p die Antwort wissen (und die Frage korrekt beantworten). Falls Sie die Antwort nicht wissen, wählen Sie eine der Antworten (uniform) zufällig aus. Wie hoch (in Abhängigkeit von p) ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die korrekte Antwort auf eine zufällige Quizfrage geben?

$p + (1-p) \cdot \frac{1}{2}$

Satz 2.10. *(Multiplikationssatz)* Seien die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ gegeben. Falls $\Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_n] > 0$ ist, gilt

$$\Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \Pr[A_3|A_1 \cap A_2] \cdots \Pr[A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}].$$

Beweis: $\cancel{\Pr[A_1]} \cdot \frac{\cancel{\Pr[A_1 \cap A_2]}}{\cancel{\Pr[A_1]}} \cdot \frac{\cancel{\Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3]}}{\cancel{\Pr[A_1 \cap A_2]}} \cdot \ldots \cdot \frac{\Pr[\bigcap_{i=1}^{n} A_i]}{\Pr[\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i]}$

Geburtstagsproblem

aka Balls-into-Bins Problem

Man wirft m Bälle zufällig und gleichverteilt in n Körbe. $0 \le m \le n$
Wie groß ist die W'keit, dass alle Bälle alleine in einem Korb liegen?

$A_i :=$ Ball i landet in einem noch leeren Korb

$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$

$$\Pr[\bigcap_{i=1}^{m} A_i] = \prod_{j=1}^{m} \Pr[A_j \mid \bigcap_{i=1}^{j-1} A_i] = \prod_{j=1}^{m} \frac{n-j+1}{n} = \prod_{j=2}^{m} \left(1 - \frac{j-1}{n}\right)$$

$$\Pr[A_j \mid \bigcap_{i=1}^{j-1} A_i] = \frac{n-j+1}{n}$$

$$\le \prod_{j=2}^{m} e^{-\frac{j-1}{n}} = e^{-\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{m}(j-1)} = e^{-\frac{m(m-1)}{2n}}$$

$1-x \le e^{-x}$

Satz 2.13. *(Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)* Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ seien paarweise disjunkt und es gelte $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Dann folgt

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i].$$

Analog gilt für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dass

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i].$$

Aufgabe: Zeige, wenn $Pr[A|B] = Pr[A|\bar{B}]$, dann $Pr[A] = Pr[A|B]$

Satz 2.15. *(Satz von Bayes)* Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ seien paarweise disjunkt. Ferner sei $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$ ein Ereignis mit $\Pr[B] > 0$. Dann gilt für ein beliebiges $i = 1, \dots, n$

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}.$$

Analog gilt für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \dots$ mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dass

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{\infty} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}.$$

$\square$

UNABHÄNGIGKEIT

Definition 2.18. Die Ereignisse A und B heissen *unabhängig*, wenn gilt

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B].$$

Aufgabe: Zeige, dass wenn Ereignisse A und B unabhängig sind auch A und $\overline{B}$ unabhängig sind.

Definition 2.22. Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heissen *unabhängig*, wenn für alle Teilmengen $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdots \Pr[A_{i_k}]. \tag{2.2}$$

Eine unendliche Familie von Ereignissen A_i mit $i \in \mathbb{N}$ heisst unabhängig, wenn (2.2) für jede endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Lemma 2.24. Seien A, B und C unabhängige Ereignisse. Dann sind auch $A \cap B$ und C bzw. $A \cup B$ und C unabhängig.