MINIQUIZ BESPRECHUNG

Jeder k-reguläre bipartite Graph $G = (A \cup B, E)$ für $k \geq 1$ hat ein Matching der Größe $|A|$.

- [x] Wahr
- [ ] Falsch

Das (kardinalitäts-)maximale Matching in einem bipartiten Graphen kann in der Zeit $O(\sqrt{|V|}|E|)$ gefunden werden.

- [x] Wahr
- [ ] Falsch

Jeder Graph ohne Dreieck hat eine chromatische Zahl von höchstens 100.

- [ ] Wahr
- [x] Falsch

Wenn G ein bipartiter Graph ist und M in G ein Matching aufweist, das *nicht kardinalitätsmaximal* ist, dann gibt es in G einen augmentierenden Pfad bezüglich M.

- [x] Wahr
- [ ] Falsch

Wenn G ein bipartiter Graph ist und M in G ein Matching aufweist, das *nicht kardinalitätsmaximal* ist, dann gibt es in G einen augmentierenden Pfad bezüglich M.

- [ ] Wahr
- [ ] Falsch

Für einen vollständigen Graphen G mit gerader Anzahl von Knoten und positiven Gewichten $\ell(x, y)$, der die Dreiecksungleichung erfüllt, sei M die minimale Kosten-perfekte Paarung und C die minimale Kosten-Reise des Handlungsreisenden. Dann ist $\ell(M) \leq \ell(C)/2$.

- [x] Wahr
- [ ] Falsch

Wenn G ein Graph mit maximalem Grad $\Delta(G)$ ist, findet ein Greedy-Algorithmus immer die richtige Einfärbung in höchstens $\Delta(G) + 1$ Farben.

- [x] Wahr
- [ ] Falsch

Jeder Zyklus hat eine korrekte 2-Farbgebung.

- [ ] Wahr
- [x] Falsch

C_{2n+1}

Es gibt einen Algorithmus in polynomieller Zeit, der eine $1,5$-Approximation für das metrische Problem des Handlungsreisenden findet.

- [x] Wahr
- [ ] Falsch

$O(n^3)$

Es gibt einen effizienten Algorithmus, der für jeden planaren Graphen eine geeignete Einfärbung in 6 Farben findet.

- [x] Wahr
- [ ] Falsch

BESPRECHUNG PG1

Exercise 1 – *Matchings and magic tricks*

(a) We say that a bipartite graph $G = (A \cup B, E)$ is (k, ℓ)-regular if every vertex in A has degree exactly k, and every vertex in B has degree exactly ℓ. Show that when $k \geq \ell$, any (k, ℓ)-regular graph G has a matching of size exactly $|A|$.

$X \subseteq A$ beliebig

$\sum_{x \in X} \deg(x) = |X| \cdot k$ $\qquad$ $|N(X)| \geq |X| \cdot \underbrace{\frac{k}{\ell}}_{\geq 1}$

Satz von Hall $\Rightarrow$ es existiert Matching der Grösse A

(b) Magician together with their assistant performs the following trick. An audience member picks arbitrary 5 cards from a standard 52-card playing deck, and gives those cards to the magicians assistant. The assistant then picks four out of the five cards, and shows those cards to the magician, in order of the assistants choice. The magician now with certainty announces what is the remaining fifth card in the assistants hand, not seen by the magician at any point.

How the magician and the assistant could have chosen a strategy ahead of time, so that they succeed in this trick, regardless of which five cards are selected by the audience member? During the trick, both magician and the assistant can consult any notes they might have prepared (in collaboration) ahead of time, but they cannot communicate in any way outside of the scope of the trick (i.e. the only communication from assistant to the magician is a sequence of 4 cards the assistant presents to them in the order of their choice).

Hint: Use subproblem (a).

$A = \{ K_1 \subseteq K \mid |K_1| = 5 \}$ $\qquad$ $B = \{$alle geordneten Kartenmengen der Grösse $4\}$

$a \in A$, $b \in B$ $\qquad$ $\{a, b\} \in E \iff$ die vier geordneten Karten (rep. von b) in der Menge K_1 sind (rep. von a)

jeder Knoten aus A hat Grad $5! = 120$

jeder Knoten aus B hat Grad $\ell = 52 - 4 = 48$

$\Rightarrow$ es existiert ein Matching mit Grösse $|A|$ (Anwendung von a))

Common Mistakes: THEORIE 1

erstmal ein Kompliment: Gegenbeispiele waren meist sehr gut erläutert

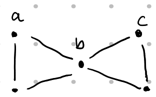
Aufgabe a): „Wenn alle Knotengrade in G gerade sind und G zusammenhängend ist, gilt $\deg(v) \geq 2$ für $\forall v \in V$" $\longrightarrow$ $|V| = 1$

„Da wir zwei kantendisjunkte u-v-Pfade haben, ist der Graph 2-kanten-zusammenhängend"

Aufgabe c):

(c) Prove or give a counter-example to the following claim: For a graph $G = (V, E)$, we define a relation on *vertices* of G: vertices $a \in V$ and $b \in V$ satisfy $a \sim b$ when there is a cycle in G containing both a and b. Then for every graph G relation $\sim$ is an equivalence relation.

Gegenbeispiel wäre z.B.



$a \sim b$, $b \sim c$, aber $a \nsim c$

Gegenbeispiele, welche viele von euch gewählt haben:

ein einzelner Knoten
oder
ein Baum
$\longrightarrow$ keine Reflexivität

An sich ist das nicht falsch, aber seid bei solchen Definitionsunklarheiten vorsichtig.
Denn ein Kreis ist im A&W-Skript (Seite 2) wie folgt definiert:

Wenn wir vor allem auf die Struktur des Graphen, aber nicht so sehr auf die Bezeichnung der Knoten eingehen wollen, so lassen wir zuweilen der Übersichtlichkeit halber die Bezeichnung der Knoten weg. Abbildung 1.2 zeigt einige Beispiele hierfür: ein *vollständiger Graph* (engl. *complete graph*) K_n besteht aus n Knoten, die alle paarweise miteinander verbunden sind. Ein *Kreis* (engl. *cycle*) C_n besteht aus n Knoten, die zyklisch miteinander verbunden sind. Ein *Pfad* (engl. *path*) P_n entsteht aus einem Kreis auf n Knoten, in dem wir eine beliebige Kante weglassen. Der *d-dimensionale Hyperwürfel* Q_d hat die Knotenmenge $\{0, 1\}^d$, also die Menge aller Sequenzen von d Nullen und Einsen, wobei zwei Knoten $(a_1, \ldots, a_d)$ und $(b_1, \ldots, b_d)$ genau dann durch eine Kante verbunden werden, wenn es eine und nur eine Koordinate i gibt, für die $a_i \neq b_i$ gilt. Man überprüft leicht, dass Q_3 das „Skelett" eines herkömmlichen (3-dimensionalen) Würfels ist.

$n = 1$ nicht direkt ausgeschlossen

generell bei prove/disprove immer kurz sagen, ob ihr beweist oder widerlegt

Färbungen

Definition: Eine (Knoten-)Färbung eines Graphen $G=(V,E)$ mit k Farben ist eine Abbildung $c: V \to [k]$, sodass gilt $c(u) \neq c(v)$ für alle Kanten $\{u,v\} \in E$.

Die chromatische Zahl $\chi(G)$ ist die minimale Anzahl Farben, welche für eine Knotenfärbung von G benötigt wird.

Aufgabe: Was ist die chromatische Zahl von K_n, C_n und G, wobei G ein Baum auf sieben Knoten ist

$\chi(K_n) = n$ $\quad \chi(C_n) = \begin{cases} 2 & n \text{ gerade} \\ 3 & n \text{ ungerade} \end{cases}$ $\quad \chi(G) = 2$

Satz 1.58. Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge als Teilgraphen enthält.

Ein Graph ist k-partit $\Leftrightarrow \chi(G) \leq k$

Anwendungsbeispiel: planare Graphen

Satz 1.59 (Vierfarbensatz). Jede Landkarte lässt sich mit vier Farben färben.

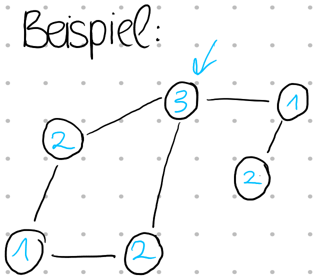
Beweis: Unterscheidung in endlich viele Fälle
jeder Fall wird bewiesen durch Überprüfung mit dem Computer

„Gegeben ein Graph, gilt $\chi(G) \leq 3$?" $\longrightarrow$ NP-vollständiges Problem

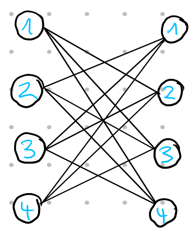
GREEDY-FÄRBUNG (G)

```
wähle eine beliebige Reihenfolge der Knoten: V = {v_1, ..., v_n}
c[v_1] ← 1
for i = 2 to n do
    c[v_i] ← min{k ∈ ℕ | k ≠ c(u) für alle u ∈ N(v_i) ∩ {v_1, ..., v_{i-1}}}
```

Beispiel:



Worst Case Färbung von bipartiten Graphen $G=(V,E)$: $\frac{|V|}{2}$ Farben



3-regulärer, bipartiter Graph auf 8 Knoten

$\rightarrow$ in welcher Reihenfolge erhalten wir eine Färbung mit 4 Farben?

Satz 1.60. Sei G ein zusammenhängender Graph. Für die Anzahl Farben C(G), die der Algorithmus GREEDY-FÄRBUNG benötigt, um die Knoten des Graphen G zu färben, gilt

$$\chi(G) \overset{①}{\leq} C(G) \overset{②}{\leq} \Delta(G) + 1.$$

Ist der Graph als Adjazenzliste gespeichert, findet der Algorithmus die Färbung in Zeit $O(|E|)$. ← ③

→ für jede Reihenfolge der Knoten braucht der Greedy-Algo max. $\Delta(G)+1$ viele Farben
→ es gibt eine Reihenfolge der Knoten für die der Greedy-Algo nur $\chi(G)$ viele Farben braucht

Satz 1.65. Ist $G = (V, E)$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass jeder induzierte Subgraph von G einen Knoten mit Grad höchstens k enthält, so gilt $\chi(G) \leq k+1$ und eine $(k+1)$-Färbung lässt sich in Zeit $O(|E|)$ finden.

$\exists v \in V. \deg(v) \leq k \rightarrow v = v_n$

→ löschen v

→ $\exists w \in V \setminus \{v\}. \deg(w) \leq k \rightarrow w = v_{n-1}$

→ rekursiv anwenden
→ $v_1, \dots, v_n$

v_i hat in der Knotenmenge $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ max. k gefärbte Nachbarn

→ mit k+1 Farben färbbar

Heuristik

v_n := Knoten vom kleinsten Grad. Lösche v_n.
v_{n-1} := Knoten vom kleinsten Grad im Restgraph. Lösche v_{n-1}.

① Heuristik findet immer Färbung mit 2 Farben für Bäume
② Heuristik findet immer Färbung mit 6 Farben für planare Graphen ← planare Graphen haben immer einen Knoten mit Grad ≤ 5
③ Falls $G=(V,E)$ zusammenhängend und $\exists v \in V: \deg(v) < \Delta(G)$:
Heuristik findet Färbung mit höchstens $\Delta(G)$ Farben braucht

Satz von Brooks

Satz 1.64 (Satz von Brooks). Ist $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, der weder vollständig ist noch ein ungerader Kreis ist, also $G \neq K_n$ und $G \neq C_{2n+1}$, so gilt

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

und es gibt einen Algorithmus, der die Knoten des Graphen in Zeit $O(|E|)$ mit $\Delta(G)$ Farben färbt.

Algorithmus:

- Falls $\Delta(G)=2$: färbe G mit zwei Farben

  (da G zshgd und kein ungerader Kreis, ist G ein Pfad oder ein gerader Kreis)
- Falls $\exists\, v \in V$ mit $deg(v) < \Delta(G)$: färbe G mit Greedy-Algorithms + Heuristik

  (benötigt nur $\Delta(G)$ Farben)
- Falls es einen Artikulationsknoten v gibt: färbe alle Blöcke (jeweils inkl. Knoten v) mit Heuristik; ggf. Farbtausch, damit v in allen Graphen einheitlich gefärbt

  (in allen diesen Blöcken hat v Grad < $\Delta(G)$, Heuristik funktioniert also wie oben argumentiert)
- Bestimme Knoten $v,x,y \in V$ mit $x,y \in N(v)$ und $\{x,y\} \notin E$

  (diese existieren, da G zshgd und kein vollständiger Graph)
- Betrachte $G' := G[V \setminus \{x,y\}]$:
  - *Falls G' zshgd:* färbe G mit Greedy-Alg: Erst x und y, danach Heuristik für G'
  - *Falls G' nicht zshgd:* …

Satz 1.67. Jeden 3-färbbaren Graphen $G = (V, E)$ kann man in Zeit $O(|E|)$ mit $O(\sqrt{|V|})$ Farben färben.

Beweis/Algorithmus:

Fakt: wenn $\chi(G) = 3$, $\forall v \in V$ induzierter Subgraph $N(v)$ bipartit

1) Färben aller Knoten und ihrer Nachbarschaft, die min. $\sqrt{|V|}$ ungefärbte Nachbarn haben, mit 3 neuen Farben
   → gilt max. für $\sqrt{|V|}$ Knoten
   → max. $3\sqrt{|V|}$

2) Färben mit Satz von Brooks mit $\sqrt{|V|}$ Farben

insgesamt $4 \cdot \sqrt{|V|}$ Farben

Aufgabe 1 – *Bunter April*

Um dem Grau des Alltags entgegen zuwirken, entwarf das Physikdepartement der ETH die Kampagne "Mehr-Farbe-für-meinen-April". Dazu schickte es eine lange Liste mit potentiellen Aktivitäten an ihre Studenten mit der Aufforderung, Interesse an bis zu zwei Aktivitäten zu bekunden. Es wird versprochen, dass jede Aktivität mit mindestens einer Interessentin an einem Abend im April stattfindet. Zudem wird versprochen, dass es für keinen Student zu einem Konflikt kommt: Das heisst, wenn eine Studentin zwei der Aktivitäten ausgewählt hat, dürfen diese nicht am gleichen Abend stattfinden.

Kurz nachdem die E-Mail verschickt wurde, fällt den Organisatorinnen ein, dass sie vielleicht zu viel versprochen haben. Eilig laufen sie in das Informatikdepartment und passen Sie ab um Ihnen das Problem zu erläutern. Die Frage an Sie: Ist es möglich, das Versprechen zu halten?

(a) Beschreiben Sie wie obige Problemstellung als ein Graphenproblem modelliert werden kann. Das heisst, gegeben aller Präferenzen der Studentinnen, beschreiben Sie wie ein Graph konstruiert werden kann, so dass genau dann die Aktivitäten konfliktfrei geplant werden können, wenn dieser Graph eine bestimmte (welche?) Eigenschaft aufweist. Wie immer, beweisen Sie Ihre Aussage(n).

(b) Sei nun $G = (V, E)$ ein beliebiger Graph mit chromatischer Zahl $\chi(G) = k$. Angenommen wir lassen den Greedy-Färbungsalgorithmus auf G laufen mit beliebiger Knotenreihenfolge. Zeigen Sie, dass es dann für jedes beliebige ungeordnete Paar $\{a, b\} \in \binom{[k]}{2}$ eine Kante aus G gibt dessen Endpunkte mit a und b gefärbt sind.

(c) Zeigen Sie, dass jeder Graph mit chromatischer Zahl k mindestens $\binom{k}{2}$ Kanten enthält.

(d) Angenommen, das Physikdepartment hat höchstens 450 Studenten. Zeigen Sie, dass die Aktivitäten konfliktlos im April geplant werden können, egal wie die Präferenzen der Studentinnen sind.

a) $A \hat{=} \{\text{Aktivitäten}\}$

$\{u, v\} \in E$ falls ein Student sowohl Aktivität v als auch Aktivität u gewählt hat

Wahrscheinlichkeitstheorie

Definition 2.1. Ein *diskreter Wahrscheinlichkeitsraum* ist bestimmt durch eine *Ergebnismenge* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ von *Elementarereignissen*. Jedem Elementarereignis ω_i ist eine *(Elementar-)Wahrscheinlichkeit* $\Pr[\omega_i]$ zugeordnet, wobei wir fordern, dass $0 \leq \Pr[\omega_i] \leq 1$ und

$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1.$$

Eine Menge $E \subseteq \Omega$ heisst *Ereignis*. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr[E]$ eines Ereignisses ist definiert durch

$$\Pr[E] := \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega].$$

Ist E ein Ereignis, so bezeichnen wir mit $\bar{E} := \Omega \setminus E$ das *Komplementärereignis* zu E.

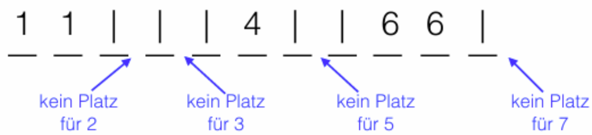
Kombinatorik: wie viele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus einer n-elem. Menge zu ziehen?

	geordnet	ungeordnet
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Zurücklegen	$n^{\underline{k}}$	$\binom{n}{k}$

$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

ungeordnet, mit Zurücklegen (Multimenge) (Beispiel für k=5, n=7)



Trick:
1) Füge n-1 Zusatzplätze ein, sodass insgesamt n+k-1 Plätze zur Verfügung stehen.
2) Wähle n-1 der Plätze aus und schreibe | auf diese Plätze. → n Bereiche
3) Fülle den ersten Bereich mit "1" aus, den zweiten mit "2", usw.

Mit diesem Trick wird jede Möglichkeit exakt einmal gezählt! $\rightarrow \binom{n+k-1}{n-k} = \binom{n+k-1}{k}$

Laplace-Raum: endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, in dem jedes Elementarereignis gleich wahrscheinlich ist. Für ein Ereignis E gilt:

$\Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}$

Lemma: Für Ereignisse A,B gilt:

1. $\Pr[\emptyset] = 0$, $\Pr[\Omega] = 1$
2. $0 \leq \Pr[A] \leq 1$
3. $\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A]$
4. Wenn $A \subseteq B$, so folgt $\Pr[A] \leq \Pr[B]$ (Monotonie)

Satz 2.3 (Additionssatz). Wenn die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ paarweise disjunkt sind (also wenn für alle Paare $i \neq j$ gilt, dass $A_i \cap A_j = \emptyset$), so gilt

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i].$$

Für eine unendliche Menge von disjunkten Ereignissen $A_1, A_2, \dots$ gilt analog

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i].$$

→ ansonsten Siebformel, z.B. für $n=2$:

$$\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]$$

Korollar 2.6. *(Boolesche Ungleichung, Union Bound)* Für Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ gilt

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i].$$

Analog gilt für eine unendliche Folge von Ereignissen $A_1, A_2, \dots$, dass $\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i]$.

Definition 2.8. A und B seien Ereignisse mit $\Pr[B] > 0$. Die *bedingte Wahrscheinlichkeit* $\Pr[A|B]$ von A gegeben B ist definiert durch

$$\Pr[A|B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}.$$

Aufgaben: Wahrscheinlichkeitsbasics

1) Ich würfel einen Würfel zweimal, wie wahrscheinlich ist es, dass ich mind. eine 6 würfle?

$$\Pr[\text{mind. eine } 6] = 1 - \left(\tfrac{5}{6}\right)^2 = \tfrac{11}{36}$$

2) Wir werfen dreimal in Folge eine gewöhnliche Münze, wie groß muss Ω sein, um dies mit einem Laplace Raum zu modellieren?

$2^3 \rightarrow 8$ Elementarereignisse $\quad \Omega = \{K, Z\}^3$

3) In einer Stadt gibt es 500 gelbe und 300 grüne Autos.

Es gibt einen Autounfall und das Auto flüchtet.
Ein Zeuge behauptet, er hätte ein gelbes Auto gesehen.
Aus Erfahrungsberichten der Polizei sind Zeugenaussagen zu 80% richtig.
Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto gelb war?

$\Pr[\text{Auto ist gelb} \mid \text{Zeuge sah gelb}]$

$$= \frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{5}}{\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{40}} = \frac{20}{23}$$