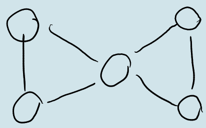
MINIQUIZ

Jeder Graph hat eine gerade Anzahl von Knoten ungeraden Grades.

- [x] Wahr → Handschlaglemma
- [ ] Falsch

Jeder Artikulationsknoten in einem Graphen ist mit einer Brücke verbunden.

- [ ] Wahr
- [x] Falsch



Es gibt einen 5-zusammenhängenden Graphen, bei dem alle Knoten Grad 3 haben.

- [ ] Wahr
- [x] Falsch

Knotenzusammenhang $\leq$ Kantenzusammenhang $\leq$ Minimalgrad

Der Hamiltonkreis in einem Graphen besucht jeden Knoten genau einmal.

- [x] Wahr
- [ ] Falsch

Für zwei Kanten a, b eines Graphen ist die Relation $a \sim b$, wenn a und b auf einem gemeinsamen Kreis liegen, eine Äquivalenzrelation.

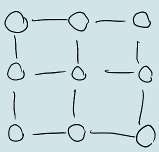
- [x] Wahr
- [ ] Falsch

Jeder zusammenhängende Graph mit allen Knoten geraden Grades hat einen Eulerkreis.

- [x] Wahr
- [ ] Falsch

Jeder 2-zusammenhängende Graph hat einen Hamiltonkreis.

- [ ] Wahr
- [x] Falsch



oder Petersengraph

Wenn $G = (V, E)$ ein 3-zusammenhängender Graph ist und $v \in V$, dann ist $G[V \setminus \{v\}]$ 2-zusammenhängend.

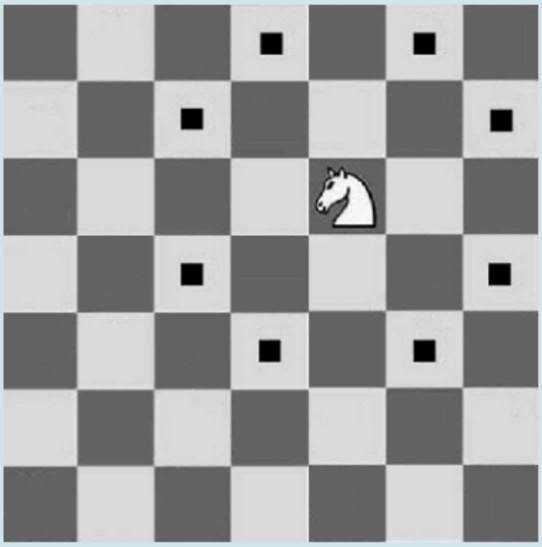
- [x] Wahr
- [ ] Falsch

Für jedes $t \geq 3$ ist ein vollständiger Graph K_t mit t Knoten 2-zusammenhängend.

- [x] Wahr
- [ ] Falsch

Es gibt einen Hamiltonkreis für einen Schachspringer, der auf einem 7×7 Schachbrett springt.

Zur Erinnerung: Nachfolgend sind die zulässigen Springerzüge im Schach aufgeführt.



- Springer wechselt bei jedem Zug die Farbe des aktuellen Felds
- $G = (W \uplus S, E)$ bipartit, dabei $|S| > |W|$
  $\Rightarrow$ kein Hamiltonkreis

- [ ] Wahr
- [x] Falsch

HAMILTONKREISE (continued)

Satz von Dirac Wenn $G=(V,E)$ ein Graph mit $|V|\geq 3$ Knoten ist, in dem jeder Knoten mind. $\frac{|V|}{2}$ Nachbarn hat, dann ist G hamiltonsch.

Beweis: Zuerst zeigen, dass G zusammenhängend ist:
- Seien $x,y \in V$, $x \neq v$ beliebig
  - Fall ①: $\{x,y\} \in E$ ✓
  - Fall ②: $\{x,y\} \notin E$
    - $N(x) \cap N(y) \neq \emptyset$, da $deg(x), deg(y) \geq \frac{|V|}{2}$

Widerspruchsbeweis: Annahme: G nicht hamiltonsch
- Sei $P = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ längster Pfad in G
- alle Nachbarn von v_1 und v_k in P, ansonsten ↯ da P nicht längster Pfad
- $\exists i: 2 \leq i \leq k$ $v_i \in N(1)$ und $v_{i-1} \in N(v_k)$
  - → v_1 zu mind. $\frac{|V|}{2}$ vielen Knoten inzident
  - → wäre v_k zu keinem der entsprechenden v_{i-1} benachbart, dann wäre v_k nur zu max. $k-1-\frac{|V|}{2} < \frac{|V|}{2}$ Knoten benachbart ↯
- können nun Kreis bilden: $\langle v_1, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, v_1 \rangle$
- $k < n$ → ansonsten Hamiltonkreis ↯
- $\exists v \in V$, die nicht auf dem Kreis liegen und zu einem Knoten der auf dem Kreis liegt inzident ist
  - → wäre das nicht der Fall, wäre G nicht zusammenhängend
- wir können nun einen Pfad der Länge $k+1$ bilden ↯ Widerspruch zur längsten Pfad Annahme

Das Finden von Hamiltonkreisen ist NP-vollständig

Wie finden wir einen Hamiltonkreis in exponentieller Zeit?

→ mit Hilfe von DP!

$$P_{S,x} := \begin{cases} 1 & \text{es gibt } 1-x\text{-Pfad, der alle Knoten aus } S \text{ enthält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Auslesen der Lösung: G enthält Hamiltonkreis $\Leftrightarrow \exists x \in N(1)$ mit $P_{[n],x} = 1$

Base Case: $P_{\{1,x\},x} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{1,x\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Rekursion: $P_{S,x} = \max\{P_{S \setminus \{x\}, x'} \mid x' \in S \cap N(x), x' \neq 1\}$

Speicher: $O(n \cdot 2^n)$

Laufzeit: $O(n^2 \cdot 2^n)$

TRAVELLING SALESMAN PROBLEM (TSP)

Problemstellung: Graph K_n mit Gewichtsfunktion $\ell: \binom{[n]}{2} \to \mathbb{N}_0$, finde Hamiltonkreis C mit

$$\sum_{e\in C} \ell(e) = \min\Big\{\sum_{e\in C'} \ell(e) \;\Big|\; C' \text{ Hamiltonkreis in } G\Big\}$$ [C kürzester Hamiltonkreis]

Wie zeigen wir nun, dass TSP eine Verallgemeinerung des Hamiltonkreisproblems ist?

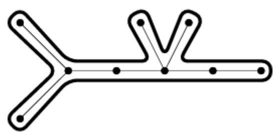
⇒ Reduktionsidee:

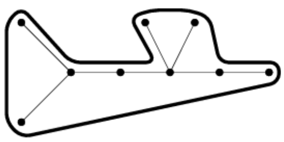
$$\ell(\{x,y\}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \{x,y\} \in E \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Metrisches TSP: TSP mit zusätzlicher Dreiecksungleichung

$$\ell(\{x,z\}) \le \ell(\{x,y\}) + \ell(\{y,z\}) \quad \forall x,y,z \in V$$

Satz: Für das metrische TSP gibt es einen 2-Approximationsalgorithmus mit Laufzeit $O(n^2)$.





1. Bestimme MST T
2. Verdopple alle Kanten von T
3. Bestimme Eulertour W
4. Durchlaufe W, mit Abkürzungen, so dass jeder Knoten nur einmal besucht wird ⇒ Hamiltonkreis C

$\ell(T) \le \operatorname{opt}(K_n, \ell)$

$2\ell(T) \le 2 \cdot \operatorname{opt}(K_n, \ell)$

$\ell(W) = 2\ell(T)$

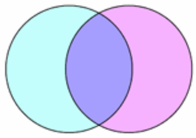
$\underset{\uparrow}{\ell(C) \le} \ell(W) = 2 \cdot \ell(T) \le 2\operatorname{opt}(K_n, \ell)$

Dreiecksungleichung

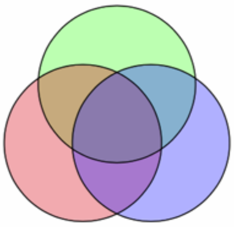
Satz 1.35. *(Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion)* Für endliche Mengen $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ gilt:

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_l}| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\ &\quad - \cdots + (-1)^{n+1} \cdot |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.\end{aligned}$$

Für n=2: $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$



Für n=3: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$



Matchings

Matching := Kantenmenge $M \subseteq E$, kein Knoten des Graphen zu mehr als einer Kante aus M inzident ist

Knoten v wird von M überdeckt, falls es eine Kante $e \in M$ gibt, die v enthält.

perfektes Matching: Wenn jeder Knoten durch genau eine Kante des Matchings überdeckt wird ($|M| = \frac{|V|}{2}$)

Ein Matching M ist...
- ... inklusionsmaximal, falls $M \cup \{e\}$ kein Matching $\forall e \in E \setminus M$
- ... kardinalitätsmaximal, falls $|M| \geq |M'|$ für alle Matchings M' in G

Wie kann man die Matchingeigenschaften perfekt, inklusionsmaximal und kardinalitätsmaximal in Verbindung setzen?

M perfekt $\Rightarrow$ M kardinalitätsmaximal $\Rightarrow$ M inklusionsmaximal

Aufgabe: Zeige, dass jeder Baum höchstens ein perfektes Matching hat

Lösungsidee: Bei den Blättern starten

→ jedes Blatt u und Vorgänger v, $\{u,v\} \in M$
→ wie bei Greedy u und v und alle inzidenten Kanten löschen
→ repeat

Dieses Matching ist das einzige perfekte Matching, da jede hinzugefügte Kante im perfekten Matching sein muss (es gibt keine andere Möglichkeit für ein perfektes Matching)