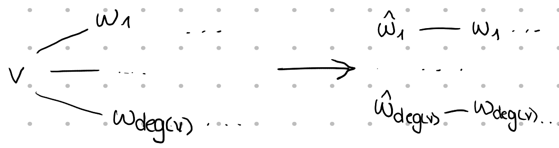
Lange Pfade

Problem: Gibt es einen Pfad der Länge k in G?
$\longrightarrow$ NP-vollständiges Problem

Reduktion auf Hamiltonkreise

Satz 3.1. Falls wir LONG-PATH für Graphen mit n Knoten in $t(n)$ Zeit entscheiden können, dann können wir in $t(2n-2) + O(n^2)$ Zeit entscheiden, ob ein Graph mit n Knoten einen Hamiltonkreis hat.



Beweis: Graphkonstruktion von G' mit $|V(G')| \leq 2n-2$ Knoten, sodass

G besitzt Hamiltonkreis $\Longleftrightarrow$ G' hat einen Pfad der Länge n

$\rightarrow$ ausführlicher Beweis an der Tafel

"$\Rightarrow$": Sei $\langle w_1, w_2, \ldots, w_n, w_1 \rangle$ ein Hamiltonkreis in G und $w_1 = v$ (o.B.d.A.).
Dann ist $\langle \hat{w}_2, w_2, \ldots, w_n, \hat{w}_n \rangle$ ein Pfad der Länge n in G'

"$\Leftarrow$": Sei $\langle u_0, u_1, \ldots, u_n \rangle$ ein Pfad der Länge n in G'
- $\rightarrow$ $u_1, \ldots, u_{n-1}$ haben Grad ≥ 2, sie sind also die $n-1$ aus G übernommenen Knoten
- $\rightarrow$ da alle Knoten verschieden sein müssen (Definition eines Pfads), müssen diese Knoten zwei der neuen Knoten in G' sein
- $\rightarrow$ in G gibt es $\langle v, u_1, \ldots, u_{n-1}, v \rangle$ als Hamiltonkreis $\blacksquare$

DP für Hamiltonkreise

Ziel: Testen, ob es für ein $x \in N(1)$ einen 1-x-Pfad gibt, der alle Knoten aus V enthält.

DP-Eintrag: $P_{S,x} := \begin{cases} 1, & \text{es gibt in } G \text{ einen } 1\text{-}x\text{-Pfad, der genau die Knoten aus } S \subseteq V \text{ enthält} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

G enthält Hamiltonkreis $\Longleftrightarrow$ $\exists x \in N(1).\ P_{[n],x} = 1$

Base Cases: $P_{\{1,x\},x} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{1,x\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Rekursion: $P_{S,x} = \max\{ P_{S \setminus \{x\}, x'} \mid x' \in S \cap N(x),\ x' \neq 1 \}$

Speicher: $O(n \cdot 2^n)$

Laufzeit: $O(n^2 \cdot 2^n)$

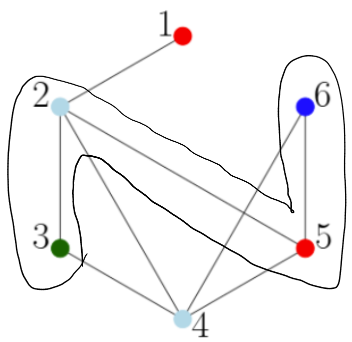
Bunte Pfade

Frage: Können wir das Problem der langen Pfade für "kürzere" lange Pfade (Länge im Vergleich zu $|V|$ klein) in polynomieller Zeit lösen?

$\longrightarrow$ Ja, für $B = \log n$

Definiere Färbung $\gamma: V \to [k]$ für einen Graphen $G = (V, E)$

Pfad ist bunt $\Leftrightarrow$ alle Knoten des Pfades haben unterschiedliche Farben



Welche Länge hat der längste bunte Pfad?

Wir färben die Knoten von G zufällig mit k Farben.
Wie viele verschiedene Färbungen gibt es für einen Pfad der Länge $k-1$? $\rightarrow k^k$
Wie viele sind davon bunt? $\rightarrow k!$

Nehmen wir an es existiert ein Pfad P der Länge $k-1$ in G.

$$\Pr[\exists \text{ ein bunter Pfad der Länge } k-1] \geq \Pr[P \text{ ist bunt}] = \frac{k!}{k^k} \geq e^{-k}$$

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \geq \frac{x^x}{x!}$$

Wie oft müssen wir G im Erwartungswert färben, sodass P bunt ist?

$$\frac{1}{\Pr[\exists \ldots]} \leq e^k$$

Annahme (nächste Vorlesung): Wir können in $O(2^k \cdot k \cdot m)$ entscheiden, ob G einen bunten Pfad der Länge $k-1$ enthält.

Monte-Carlo-Algorithmus

1. Färbe G mit $k = B+1$ Farben in $O(n)$
2. Suche nach bunten Pfaden der Länge B
   und gebe „JA" aus, falls es einen gibt und ansonsten „NEIN". $O(2^k mk)$

$Pr[\text{Erfolg}] \geq e^{-k}$

Wiederholen wir das ganze λe^k mal, was ist unsere Fehlerw'keit
(W'keit, dass jeder Pfad der Länge B bei allen Wiederholungen nicht bunt ist)?

$$Pr[\text{Fehler}] \leq (1-e^{-k})^{\lambda e^k} \underset{1-x \leq e^{-x}}{\leq} (e^{-e^{-k}})^{\lambda e^k} = e^{-e^{-k} \cdot e^k \cdot \lambda} = e^{-\lambda}$$

Laufzeit: $O((n+2^k mk)\lambda e^k)$

$= O(\lambda (2e)^k mk)$

$= O(\lambda n^2 m \log(n))$

$B = \log n$

$k = B+1$

$k \in O(\log n)$

Recap: Multiple Choice

1) Sei G ein Graph, der einen Hamiltonkreis hat.
Dann ist G 2-zusammenhängend.
→ Richtig

k-zusammenh.
⇒ (k-1)-zusammenh.

2) Ein Graph kann niemals 5-kantenzusammenhängend sein, wenn er...
... Knoten vom Grad 3 hat. → Richtig
... nicht 5-zusammenhängend ist. → Falsch
... nicht 4-zusammenhängend ist. → Falsch

Knotenzusammenhang ≤ Kantenzusammenhang ≤ min. Grad

$\neg 5$-z. ⇒ $\neg 5$ k.-z.

5 k.-z. ⇒ 5-z.

3) Wie viele Artikulationsknoten hat ein Pfad der Länge 5?
→ 4

4) Sei G ein Graph mit $n \geq 3$ und sei $\deg(v) \geq \frac{1}{2}n$ für alle $v \in V$.
Dann ist G zusammenhängend.
→ Richtig, s. Satz von Dirac

5) In jedem Graphen, welcher eine gerade Knotenanzahl und einen Hamiltonkreis hat, gibt es ein perfektes Matching.
→ Richtig

6) Sei M ein Matching in einem Graphen G. Dann gilt für jeden M-augmentierenden Pfad P, dass er Länge mind. $\frac{|M|}{2}$ hat.
→ Richtig

7) Wenn ein Matching inklusionsmaximal ist, gibt es keine augmentierenden Pfade mehr.
→ Falsch

8) Sei G ein Graph. Wenn es einen Knoten $v \in V(G)$ gibt, für den gilt, dass $G[N(v)]$ mit k Farben gefärbt werden kann, dann kann G mit k+1 Farben gefärbt werden.
→ Falsch

9) Der Greedy-Algorithmus findet immer eine optimale Färbung, wenn er die Knoten in der richtigen Reihenfolge durchläuft.
→ Richtig

10) Seien A, B, C unabhängige Ereignisse mit $Pr[A \cap B \cap C] > 0$.

- $Pr[(A \cup B) \cap C] = (Pr[A] + Pr[B]) \cdot Pr[C]$
  → Falsch, Gegenbeispiel: $A, B = \Omega$
- $Pr[A] + Pr[B] \leq Pr[A \cup B]$
  → Falsch, Union Bound andersherum
- $Pr[A \mid B \cap C] = Pr[A \mid B \cup C]$ → Richtig

$$Pr[A \mid B \cap C] = \frac{Pr[A \cap B \cap C]}{Pr[B \cap C]} = \frac{Pr[A] \cdot Pr[B] \cdot Pr[C]}{Pr[B] \cdot Pr[C]} = Pr[A]$$

$$Pr[A \mid B \cup C] = \frac{Pr[A \cap (B \cup C)]}{Pr[B \cup C]} = \frac{Pr[(A \cap B) \cup (A \cap C)]}{Pr[B \cup C]} = \frac{Pr[A \cap B] + Pr[A \cap C] - Pr[A \cap B \cap C]}{Pr[B] + Pr[C] - Pr[B \cap C]}$$

$$= \frac{Pr[A] \cdot (Pr[B] + Pr[C] - Pr[B] \cdot Pr[C])}{Pr[B] + Pr[C] - Pr[B] \cdot Pr[C]} = Pr[A]$$

11) Wir nehmen an, dass $A, B \subseteq \Omega$ unabhängig sind.
Sind auch A, B und Ω unabhängig?

$Pr[\underbrace{A \cap \Omega}_{=A}] = Pr[A] = Pr[\Omega] \cdot Pr[A]$ (analog für B)

$Pr[A \cap B \cap \Omega] = Pr[A \cap B] = Pr[A] \cdot Pr[B] \cdot \underbrace{Pr[\Omega]}_{=1}$

12) Seien $X_1 \sim Bin(n,p)$ und $X_2 \sim Bin(n,p)$ zwei unabhängige binomelle ZV.
Welcher Verteilung folgt $X_1 + X_2$?
$\rightarrow X_1 + X_2 \sim Bin(2n, p)$

13) Seien X, Y, Z ZV wobei X, Y unabhängig sind, dann gilt immer
$E[X + Y \cdot Z] = E[X] + E[Y] \cdot E[Z]$
$\rightarrow$ Falsch

14) Seien X und Y zwei ZV mit $E[XY] = E[X]E[Y]$. Dann sind X und Y unabhängig.
$\rightarrow$ Falsch, andere Implikation stimmt
$X(\omega) = \omega \quad \Omega = \{-1, 0, 1\} \qquad Y = \begin{cases} 1 & \text{falls } X=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

15) Jeder Monte Carlo Algorithmus kann in einen Las Vegas Algorithmus umgewandelt werden.
$\rightarrow$ Falsch, aber andersherum richtig

16) Der randomisierte Algorithmus A löst Problem P mit W'keit p und gibt sonst "Keine Antwort" aus.
Wie oft müssen wir A im Erwartungswert laufen lassen, bis er Problem P löst?
$\rightarrow$ geometrisch verteilt, also $\frac{1}{p}$