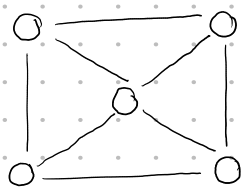
ZUSAMMENHANG

A&D-Recap: wann ist ein Graph zusammenhängend?
→ es gibt zwischen je zwei Knoten des Graphens einen Pfad

Definition 1.23. Ein Graph $G = (V, E)$ heisst k-*zusammenhängend*, falls $|V| \geq k+1$ und für alle Teilmengen $X \subseteq V$ mit $|X| < k$ gilt: Der Graph $G[V \setminus X]$ ist zusammenhängend.

Definition 1.24. Ein Graph $G = (V, E)$ heisst k-*kanten-zusammenhängend*, falls für alle Teilmengen $X \subseteq E$ mit $|X| < k$ gilt: Der Graph $(V, E \setminus X)$ ist zusammenhängend.

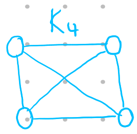


Ist dieser Graph 3-zusammenhängend? → wahr
Ist dieser Graph 2-zusammenhängend? → wahr
Für welche k ist dieser Graph k-kanten-zusammenhängend? → 1,2,3

Merkregel für Graphenzusammenhang

(Knoten-)Zusammenhang ≤ Kantenzusammenhang ≤ Minimalgrad

Beispiel für Gleichheit:
K_n ("complete Graph")

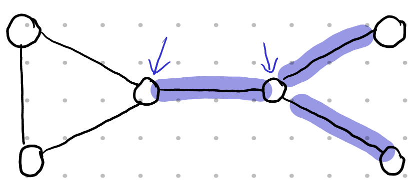


Satz von Menger:

Sei $G=(V,E)$ ein Graph und $u,v \in V$, $u \neq v$. Dann gilt:
- Jeder u-v-Seperator mind. Grösse $k \Leftrightarrow$ Es gibt mind. k intern-knotendisjunkte u-v-Pfade
- " u-v-Kantenseperator —"— $\Leftrightarrow$ —"— kantendisjunkte u-v-Pfade

v ist Artikulationsknoten (cut vertex), wenn $G[V \setminus \{v\}]$ nicht zusammenhängend ist

$e=\{u,v\}$ ist eine Brücke (cut edge), wenn $G(V, E \setminus \{e\})$ nicht zusammenhängend ist



Lemma: Sei G zusammenhängend. Ist $\{u,v\} \in E$ eine Brücke, so gilt für u (analog für v):
$\deg(u)=1$ oder u ist ein Artikulationsknoten

HOW TO: Artikulationsknoten finden

Idee: DFS!

DFS-Baumkanten

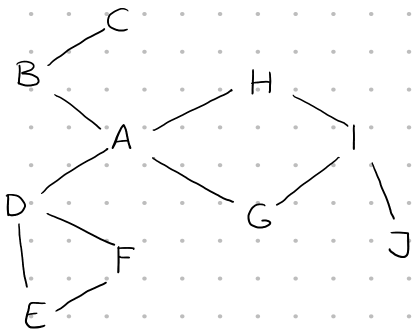
$low[v] :=$ kleinste DFS-Nummer, die von v durch einen Pfad von beliebig vielen Vorwärts- und einer Rückwärtskante erreicht werden kann

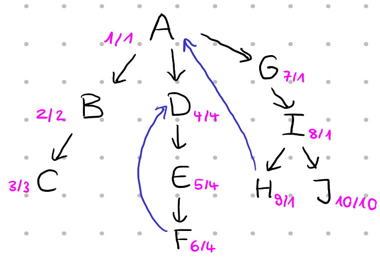
Kanten, die nicht im DFS-Baum sind

rekursive Berechnung: $low[v] = \min\left(dfs[v], \min_{(v,w)\in E} \begin{cases} dfs[w] & \text{falls } (v,w) \text{ Restkante} \\ low[w] & \text{falls } (v,w) \text{ Baumkante} \end{cases}\right)$ in $O(|V|+|E|)$

Base Case: Knoten mit höchster DFS-Nummer
Berechnungsreihenfolge in absteigender DFS-Folge

Aufgabe: Finde DFS/low-Nummern bei DFS(A)





v Artikulationsknoten $\Leftrightarrow \begin{cases} v \text{ ist Wurzel in } T \text{ und Grad} \geq 2 \\ v \text{ ist nicht Wurzel und } \exists w \in V: \{v,w\} \in E(T) \text{ und } low[w] \geq DFS[v] \end{cases}$

eine gerichtete Kante (v,w) des DFS-Baums T ist eine Brücke
$\Leftrightarrow$
$low[w] > dfs[v]$

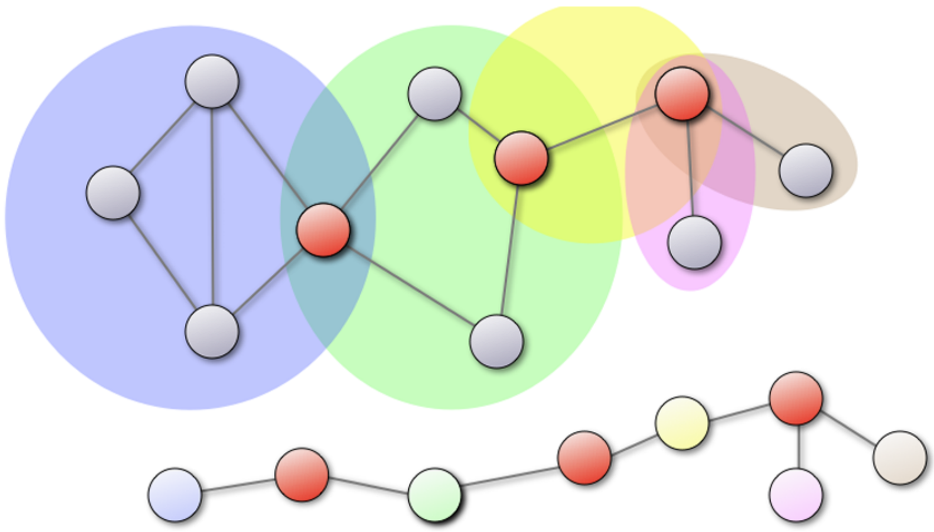
BLÖCKE

Definition/Proposition 1.29. Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Für $e, f \in E$ definieren wir eine Relation durch

$$e \sim f :\Longleftrightarrow e = f \text{ oder es gibt einen gemeinsamen Kreis durch } e \text{ und } f.$$

Dann ist diese Relation eine Äquivalenzrelation. Wir nennen die Äquivalenzklassen *Blöcke*.

Blöcke schneiden sich (wenn überhaupt) immer in einem Artikulationsknoten



Kann ein Blockgraph Kreise haben?

→ Nein, G zusammenhängend ⟺ Blockgraph von G ist ein Baum

Menge der Blöcke

bipartit, $G = (A \uplus B, E)$

Menge der Artikulationsknoten

Kreise

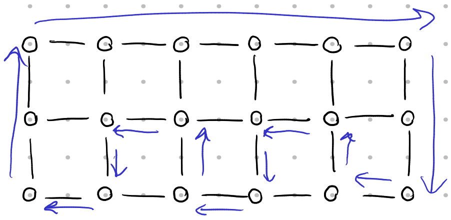
Sei $G=(V,E)$ zusammenhängend.

G hat einen Eulerzyklus $\Leftrightarrow \forall v \in V: \deg(v) \equiv_2 0$

G hat einen Eulerweg $\Leftrightarrow |\{v \in V \mid \deg(v) \equiv_2 1\}| \leq 2$

Spezialfälle für Hamiltonkreise

$n \times m$-Gittergraphen, falls $n \cdot m \equiv_2 0$

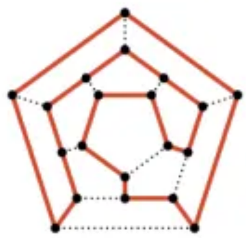


Lemma 1.38. Ist $G = (A \uplus B, E)$ ein bipartiter Graph mit $|A| \neq |B|$, so kann G keinen Hamiltonkreis enthalten. □

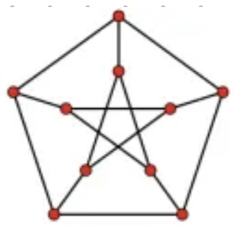
d-dimensionale Hyperwürfel mit $d \geq 2$

$\longrightarrow V = \{0,1\}^d$

$\longrightarrow$ Kanten zwischen Knoten, die sich nur durch eine Ziffer unterscheiden



Ikosaeder



Petersengraph

Aufgabe: Wie viele Hamiltonkreise gibt es in K_n?

$$\frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$$

MINIQUIZFRAGEN

1) Der Kreis auf acht Knoten (C_8) ist 2-zusammenhängend.

→ Richtig, alle Kreise sind 2-zusammenhängend

2) Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$, der keinen Artikulationsknoten enthält, ist 2-zusammenhängend.

→ Richtig, einziger Graph ohne Artikulationsknoten, aber nicht 2-zus. hat $|V| = 2$ 

3) Sei G ein zusammenhängender Graph, $T(G)$ ein Spannbaum von G und $e \in E(T(G))$ eine Kante im Spannbaum. Es gilt: e ist eine Brücke in G.

→ Falsch, trifft nur auf Graphen zu, die Bäume sind

4) Für einen zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$, der in einer Adjazenzmatrix gespeichert ist, kann man in Zeit $O(|V|^2)$ alle Artikulationsknoten und alle Brücken berechnen.

→ Wahr, wir brauchen nur unseren modifizierten DFS

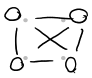
5) In einer Tiefensuche sei $w \in V$ das erste Kind von $v \in V$ im DFS-Baum.
Falls $\text{low}[w] \geq \text{dfs}[v]$, so ist v ein Artikulationsknoten.

→ Falsch, v könnte auch die Wurzel vom DFS-Baum sein

6) Gegeben sind für einen Graphen G zwei Blöcke A, B mit $A \neq B$. Dann liegt keine Kante sowohl in A als auch in B.

→ Richtung, durch Definition der Relation $\sim$.

7) Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und sei die Anzahl seiner Knoten mit ungeradem Grad gerade. Dann enthält G eine Eulertour.

→ Falsch, Gegenbeispiel: 

8) Seien $k, \ell > 1$ und k, ℓ beide ungerade. Das $(k \times \ell)$-Gitter enthält keinen Hamiltonkreis.

→ Richtig: Gittergraphen haben Hamiltonkreis $\Leftrightarrow$ $k \cdot \ell$ gerade

9) Sei n eine natürliche Zahl und G ein bipartiter Graph auf $2n + 1$ Knoten. Dann gilt: G enthält keinen Hamiltonkreis.

→ Richtig, Lemma 1.38 im Skript

10) Vollständige Graphen sind die einzigen zusammenhängenden Graphen, welche sowohl eine Eulertour als auch einen Hamiltonkreis enthalten.

→ Falsch, Gegenbeispiel: Kreise

Im Folgenden sei $G = (V, E)$ ein *zusammenhängender* Graph mit mindestens drei Knoten, d.h. $|V| \geq 3$.

(a) Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn $deg(v)$ für alle $v \in V$ eine gerade Zahl ist, dann ist G 2-Kanten-zusammenhängend. Gilt die umgekehrte Implikation ebenfalls? Genauer: Gilt für jeden 2-Kanten-zusammenhängenden Graph $G = (V, E)$, dass für alle $v \in V$ der Grad $deg(v)$ eine gerade Zahl ist?

(b) Angenommen G hat Minimalgrad 2. Ist G notwendigerweise 2-Kanten-zusammenhängend?

a) Beweis durch Widerspruch (alternativ über Eulertouren)

Annahme: G nicht 2-Kanten-zusammenhängend

$\rightarrow$ Es existiert Brücke $e = \{u, v\}$

$\rightarrow$ o.B.d.A. besteht $G[E \setminus \{e\}]$ aus ZHKs A und B mit $u \in A$, $v \in B$

$$\rightarrow \sum_{w \in A} deg_A(w) = deg_A(u) + \sum_{w \in A \setminus \{u\}} deg_A(w)$$
$$= \underbrace{\underbrace{deg_G(u)}_{\equiv_2 0} - 1 + \sum_{w \in A \setminus \{u\}} \underbrace{deg_G(w)}_{\equiv_2 0}}_{\equiv_2 1} \quad ↯ \text{ Handschlaglemma}$$

umgekehrte Impl(e)ikation falsch, Gegenbeispiel K_4

b) Gegenbeispiel: