MINIQUIZ BESPRECHUNG

Drei Ereignisse A, B, C sind genau dann unabhängig, wenn $\Pr[A \cap B \cap C] = \Pr[A]\Pr[B]\Pr[C]$.

Three events A, B, C are independent if and only if $\Pr[A \cap B \cap C] = \Pr[A]\Pr[B]\Pr[C]$.

○ Wahr
☒ Falsch

Für drei beliebige Ereignisse A, B, C gilt
$\Pr[A \cup B \cup C] = \Pr[A] + \Pr[B] + \Pr[C] - \Pr[A \cap B] - \Pr[A \cap C] - \Pr[B \cap C] + \Pr[A \cap B \cap C]$.

For any three events A, B, C, we have $\Pr[A \cup B \cup C] = \Pr[A] + \Pr[B] + \Pr[C] - \Pr[A \cap B] - \Pr[A \cap C] - \Pr[B \cap C] + \Pr[A \cap B \cap C]$.

☒ Wahr
○ Falsch

Wir betrachten folgendes Zufallsexperiment: Wir werfen zunächst einen 6-seitigen Würfel und danach eine Münze. Dieses Zufallsexperiment lässt sich mit der Ergebnismenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, K, Z\}$ beschreiben.

We consider the following random experiment: First, we roll a six-sided die and then flip a coin. This random experiment can be described by the sample space $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, K, Z\}$.

○ Wahr
☒ Falsch

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{K,Z\}$

Für zwei beliebige Ereignisse A, B mit $\Pr[A] > 0$ und $\Pr[B] > 0$ gilt $\Pr[A|B]\Pr[B] = \Pr[B|A]\Pr[A]$.

For any two events A, B with $\Pr[A] > 0$ *and* $\Pr[B] > 0$ *we have* $\Pr[A|B]\Pr[B] = \Pr[B|A]\Pr[A]$.

☒ Wahr
○ Falsch

$\Pr[A|B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$

Man wirft einen sechsseitigen Würfel. Dann sind die Ereignisse „A = Ergebnis ist gerade“ und „B = Ergebnis ist 6“ unabhängig.

You roll a six-sided die. Then the events $A =$"the result is even" and $B =$"the result is 6." are independent.

○ Wahr
☒ Falsch

$\Pr[A \cap B] = \frac{1}{6}$

$\Pr[A] \cdot \Pr[B] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{6}$

Wenn A, B, C drei Ereignisse sind, die
$\Pr[A \cap B] = \Pr[A]\Pr[B]$,
$\Pr[A \cap C] = \Pr[A]\Pr[C]$ und
$\Pr[B \cap C] = \Pr[B]\Pr[C]$
erfüllen, dann sind A, B, C unabhängig.

If A, B, C are three events satisfying
$\Pr[A \cap B] = \Pr[A]\Pr[B]$,
$\Pr[A \cap C] = \Pr[A]\Pr[C]$, *and*
$\Pr[B \cap C] = \Pr[B]\Pr[C]$,
then A, B, C are independent.

○ Wahr
☒ Falsch

fehlt: $\Pr[A \cap B \cap C] = \Pr[A] \cdot \Pr[B] \cdot \Pr[C]$

Wenn A, B, C drei unabhängige Ereignisse sind, dann
$\Pr[A \cap B] = \Pr[A]\Pr[B]$,
$\Pr[B \cap C] = \Pr[B]\Pr[C]$, und
$\Pr[A \cap C] = \Pr[A]\Pr[C]$.

If A, B, C are three independent events, then
$\Pr[A \cap B] = \Pr[A]\Pr[B]$,
$\Pr[B \cap C] = \Pr[B]\Pr[C]$, and
$\Pr[A \cap C] = \Pr[A]\Pr[C]$.

- Wahr
- Falsch

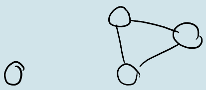
Wir haben 180 zufällig ausgewählte Personen in einem Raum. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei von ihnen am selben Tag Geburtstag haben, ist kleiner als $1/2$.

We have 180 random people in a room. The probability that two of them have birthday on the same day is smaller than $1/2$.

- Wahr
- Falsch

Angenommen, G ist ein Graph, der eine Eulertour enthält, und die Anzahl Knoten von G ist gerade. Dann enthält G ein perfektes Matching.

Suppose G is a graph that contains an Euler tour, and the number of vertices of G is even. Then G contains a perfect matching.



- Wahr
- Falsch

Wenn A und B unabhängige Ereignisse sind, dann ist $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B]$.

If A and B are independent events then $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B]$.

- Wahr
- Falsch

$\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]$

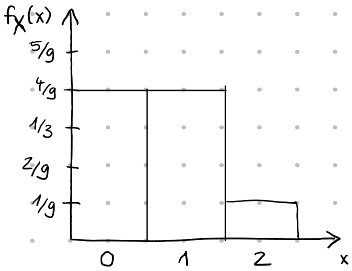
Zufallsvariablen

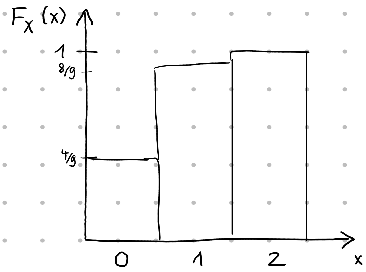
Eine Zufallsvariable (ZV) ist eine Abbildung $X: \Omega \to \mathbb{R}$, wobei ihr Wertebereich
$W_X := X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = x\}$

Dichtefunktion $f_X: \mathbb{R} \to [0,1]$, $x \mapsto Pr[X=x]$

Verteilungsfunktion: $F_X: \mathbb{R} \to [0,1]$, $x \mapsto Pr[X \leq x]$

Aufgabe: Ein normaler Würfel wird zweimal geworfen.
Die ZV X bezeichnet die Gesamtzahl der Würfe mit Ergebnis "1 oder 6".
Zeichne Dichte- und Verteilungsfunktion.





$Pr[X=0] = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{9}$

$Pr[X=1] = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot 2 = \frac{4}{9}$

$Pr[X=2] = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$
$= 1 - Pr[X=0] - Pr[X=1]$

Indikatorvariable $I_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ für ein Ereignis A

Erwartungswert

Definition 2.27. Zu einer Zufallsvariablen X definieren wir den *Erwartungswert* $\mathbb{E}[X]$ durch

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x],$$

sofern die Summe absolut konvergiert. Ansonsten sagen wir, dass der Erwartungswert undefiniert ist.

3,5

$\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \ldots + \frac{1}{6} \cdot 6$

$\frac{1}{6}(1 + \ldots + 6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3{,}5$

Satz 2.30. Sei X eine Zufallsvariable mit $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\Pr[X \geq i]}_{\sum_{j=i}^{\infty} Pr[X=j]}.$$

Satz 2.33. *(Linearität des Erwartungswerts)* Für Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ und $X := a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n + b$ mit $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \ldots + a_n \mathbb{E}[X_n] + b.$$

Aufgabe: An einem runden Tisch sitzen 10 Personen. Jede Person dreht sich gleichzeitig zu einer Seite (links oder rechts mit gleicher Wahrscheinlichkeit) und streckt die Hand aus.
Wie viele erfolgreiche Handschläge können wir erwarten?

$X :=$ #erfolgreiche Handschläge

$X_i :=$ Indikatorvariable, ob der i-te Handschlag erfolgreich ist

$X = \sum_{i=1}^{10} X_i$

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{10} X_i\right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Linearität} \\ \text{EW}}}{=} \sum_{i=1}^{10} E[X_i] = 10 \cdot E[X_1] = \frac{10}{4} = 2.5$$

Aufgabe: Welche Aussagen gelten für jede Zufallsvariable X?

$Var[X] \geq E[X] \rightarrow$ Falsch, z.B. für konstante ZV
$Var[X] \geq 0 \rightarrow$ Wahr
$E[X - E[X]] = 0 \rightarrow E[X] - E[E[X]] = E[X] - E[X] = 0$
$Var[X - \underbrace{Var[X]}] = 0 \rightarrow Var[X - Var[X]] = Var[X]$

Varianz

Definition 2.39. Für eine Zufallsvariable X mit $\mu = \mathbb{E}[X]$ definieren wir die *Varianz* $\mathrm{Var}[X]$ durch

$$\mathrm{Var}[X] := \mathbb{E}[(X - \overset{E[X]}{\mu})^2] = \sum_{x \in W_X} (x - \mu)^2 \cdot \Pr[X = x].$$

Die Grösse $\sigma := \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$ heisst *Standardabweichung* von X.

Satz 2.40. Für eine beliebige Zufallsvariable X gilt

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Beweis:

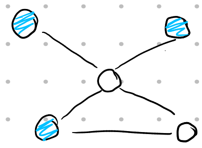
$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[X] = E[(X-E[X])^2] &= E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2] \\
&= E[X^2] - E[2XE[X]] + E[E[X]^2] \\
&= E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2 \\
&= E[X^2] - E[X]^2
\end{aligned}$$

Satz 2.41. Für eine beliebige Zufallsvariable X und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{Var}[a \cdot X + b] = a^2 \cdot \mathrm{Var}[X].$$

Definition 2.42. Für eine Zufallsvariable X nennen wir $\mathbb{E}[X^k]$ das k-*te Moment* und $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k]$ das k-*te zentrale Moment*.

Stabile Mengen



gegeben: $G=(V,E)$ mit $|V|=n$ und $|E|=m$
gesucht: möglichst grosse Teilmenge $S \subseteq V$, so dass $G[S]$ keine Kanten erhält

Algorithmus besteht aus 2 Runden:
1) Löschen jedes Knotens mit W'keit $1-p$
2) Für jede übrig gebliebene Kante einen der beiden Knoten löschen

$X :=$ Anzahl der Knoten, die die erste Runde überleben $\qquad X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

X_i: Indikatorvariable, dass der i-te Knoten überlebt $\qquad X_i \sim$

$$E[X] = E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = np$$

$Y :=$ Anzahl der Kanten, die die erste Runde überleben $\qquad Y = \sum_{i=1}^{m} Y_i$

Y_i: Indikatorvariable, dass Kante i überlebt $\qquad Y_i \sim$

$$E[Y] = mp^2$$

$S :=$ Anzahl der Knoten in der stabilen Menge

$$S \geq X - Y$$

$$E[S] \geq E[X-Y] = E[X] - E[Y] = np - mp^2$$

maximal für $p = \frac{n}{2m}$