

Besprechung Theorie 2

Exercise T2.1 – Choosing Seminars

Every student in your semester applied for exactly three different seminars. Two of the seminars obtained exactly 40 applications. All other seminars obtained less than 40 applications. Is it possible to assign each student to one of the three seminars they applied to such that there are at most 13 students in every seminar? How about at most 12 students per seminar?

$$G = (A \uplus B, E), \quad A \hat{=} \text{Studenten} \quad B \hat{=} 13 \text{ Kopien aller Seminare}$$

$$\{a, s\} \in E \Leftrightarrow \text{Student } a \overset{\text{wählt Seminarkopie}}{\downarrow} s \text{ (repräsentiert Seminar)}$$

Satz von Hall: $\forall X \subseteq A. |X| \leq |N(X)|$

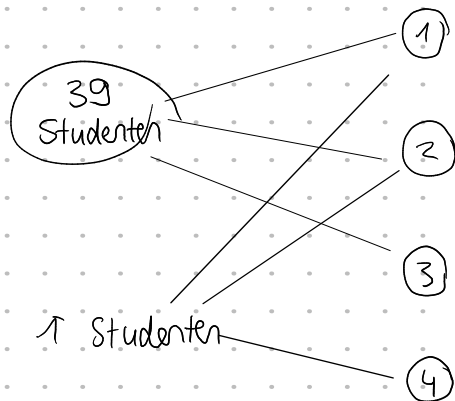
$$\forall X. \sum_{x \in X} \deg(x) = 3 \cdot 13 \cdot |X|$$

$$\text{in zidenten Kantenan } |N(X)| \leq 2 \cdot 13 \cdot 40 + (|N(X)| - 2 \cdot 13) \cdot 39$$

$$3 \cdot 13 \cdot |X| \leq 2 \cdot 13 \cdot 40 + (|N(X)| - 2 \cdot 13) \cdot 39$$

$$\Leftrightarrow |X| - \frac{2}{3} \leq |N(X)|$$

$$\Rightarrow |X| \leq |N(X)|$$



Wahrscheinlichkeitstheorie

Kombinatorik

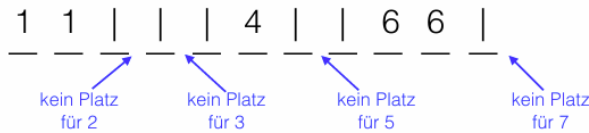
Wie viele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus einer n -elementigen Menge zu ziehen?

	geordnet	ungeordnet
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Zurücklegen	$n^{\underline{k}}$	$\binom{n}{k}$

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ungeordnet, mit Zurücklegen (Multimenge) (Beispiel für $k=5, n=7$)



Trick:

- 1) Füge $n-1$ Zusatzplätze ein, sodass insgesamt $n+k-1$ Plätze zur Verfügung stehen.
- 2) Wähle $n-1$ der Plätze aus und schreibe $|$ auf diese Plätze. $\rightarrow n$ Bereiche
- 3) Fülle den ersten Bereich mit "1" aus, den zweiten mit "2", usw.

Mit diesem Trick wird jede Möglichkeit exakt einmal gezählt! $\rightarrow \binom{n+k-1}{n-1}$

Aufgaben:

1. Wieviele ungeordnete Paare mit Elementen in $\{1, 2, 3\}$ gibt es?

$$\rightarrow \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3, \quad \binom{3+2-1}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

2. Ein Rosenverkäufer verkauft Rosen drei verschiedener Farben.

Wieviele Möglichkeiten gibt es, einen Blumenstrauß aus fünf Rosen zusammenstellen?

$$\binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$$

3. Seien A und B zwei endliche Mengen mit $|A|=m$ und $|B|=n$.

Wie viele unterschiedliche Mappings können wir von A auf B definieren, $f: A \rightarrow B$?

$$\rightarrow n^m$$

Definitionen

Ergebnismenge Ω : Menge von Elementarereignissen.

Ereignis $E \subseteq \Omega$: eine Teilmenge von allen Elementarereignissen

Komplementärereignis $\bar{E} := \Omega \setminus E$

Laplace-Raum: Endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, in dem alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind:

$$\forall \omega \in \Omega: \Pr[\omega] = \frac{1}{|\Omega|}, \Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

bedingte W'keit: A, B Ereignisse, $\Pr[B] > 0$

$$\Pr[A|B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$$

Lemma: Für Ereignisse A, B gilt:

1. $\Pr[\emptyset] = 0, \Pr[\Omega] = 1$
2. $0 \leq \Pr[A] \leq 1$
3. $\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A]$
4. Wenn $A \subseteq B$, so folgt $\Pr[A] \leq \Pr[B]$ (Monotonie)

Additionssatz: $A_1, \dots, A_n$ paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, \dots, A_n$

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] = \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$$

Union Bound: $\Pr\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] \leq \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$

Aufgabe:

Finden Sie für jede der vier folgenden Teilaufgaben einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr[\cdot])$ und Ereignisse $A, B, \dots \subseteq \Omega$ die die vorgeschriebenen Eigenschaften erfüllen, oder beweisen Sie dass kein solcher Wahrscheinlichkeitsraum existiert.

- (i) $\Pr[A] = \frac{1}{4}, \Pr[B] = \frac{1}{3}$ and $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B]$.
- (ii) $\Pr[A] = \frac{1}{4}, \Pr[B] = \frac{1}{3}$ and $\Pr[A \cup B] < \Pr[A] + \Pr[B]$.
- (iii) $\Pr[A] = \Pr[B], \Pr[A \cap B] = \frac{1}{4}$, and $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$ (d.h. A und B sind unabhängig).
- (iv) $\Pr[A] = \Pr[B] = \Pr[C] = \frac{5}{6}$ and $\Pr[A \cap B \cap C] = 0$.

$$\Omega = \{1, \dots, 12\}$$

$$(i) \quad A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6, 7\}$$

$$(ii) \quad A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5, 6\}, \Pr[\{1, \dots, 6\}] = \frac{1}{2} < \frac{7}{12}$$

$$(iii) \quad \Omega = \{1, 2, 3, 4\}, A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}, \Pr[A \cap B] = \frac{1}{4}$$

$$(iv) \quad \Pr[A \cap B \cap C] = 1 - \Pr[\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}] \geq 1 - \Pr[\bar{A}] - \Pr[\bar{B}] - \Pr[\bar{C}] = \frac{1}{2} > 0$$

↑
Union Bound

$$\Omega = \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\}$$

E = beide Würfel sind gerade

$\bar{E}$ = mind. ein Würfel ungerade

Wir ziehen dreimal ^{ohne Zurücklegen} aus einer Urne mit 3 roten und 4 blauen Kugeln.
 Was ist die W'keit, dass alle gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben?

$$\begin{aligned} \Pr[\text{alle gleiche Farbe}] &\stackrel{\text{Additionssatz}}{=} \Pr[\text{alle rot}] + \Pr[\text{alle blau}] \\ &= \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{35} + \frac{4}{35} = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Sei B_n das Ereignis, dass ein zufällig generierter Graph $G(n, p)$ mind. einen isolierten Knoten besitzt.
 Finde eine möglichst gute obere Schranke für $\Pr[B_n]$.

$A_i := i\text{-te Knoten isoliert}$, $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$

$$\Pr[A_i] = (1-p)^{n-1} \quad \Pr[B_n] = \Pr\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Union Bound}}}{\leq} \sum_{i=1}^n \Pr[A_i] = n \cdot (1-p)^{n-1}$$

Sie und Ihre beiden Freunde haben drei vegane Hot-Dogs. Einer davon ist vollkommen unversehrt, einer davon ist auf (genau) einer Seite angebissen und der dritte ist von beiden Seiten angebissen. Um die Hot-Dogs fair aufzuteilen, wird Ihnen einer der drei Hot-Dogs zufällig zugeteilt. Sie sehen ein zufälliges Ende Ihres Hot-Dogs und freuen sich, dass es nicht angebissen ist. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie Glück haben, und Sie den vollkommen unversehrten Hot-Dog erhalten haben?

Satz 2.10. (Multiplikationssatz) Seien die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ gegeben. Falls $\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] > 0$ ist, gilt

$$\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] =$$

$$\Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \Pr[A_3|A_1 \cap A_2] \cdots \Pr[A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}].$$

Geburtstagsproblem aka Balls-into-Bins Problem

Man wirft m Bälle zufällig und gleichverteilt in n Körbe.
Wie groß ist die W'keit, dass alle Bälle alleine in einem Korb liegen?

$$0 \leq m \leq n$$

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$$

$A_i :=$ Ball i landet in einem noch leeren Korb

$$\Pr\left[\bigcap_{i=1}^m A_i\right] = \prod_{j=1}^m \Pr\left[A_j \mid \bigcap_{i=1}^{j-1} A_i\right] = \prod_{j=1}^m \frac{n-j+1}{n} = \prod_{j=1}^m \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) \stackrel{1-x \leq e^{-x}}{\leq} \prod_{j=1}^m e^{-\frac{j-1}{n}} = e^{-\sum_{j=1}^m \frac{j-1}{n}} = e^{-\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{m-1} j} = e^{-\frac{m(m-1)}{2n}}$$

Satz 2.13. (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit) Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ seien paarweise disjunkt und es gelte $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$.
Dann folgt

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^n \underbrace{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}_{= \Pr[A_i \cap B]}$$

$$\Pr[B|A_i] = \frac{\Pr[B \cap A_i]}{\Pr[A_i]}$$

$$\Leftrightarrow \Pr[A_i \cap B] = \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]$$

Analog gilt für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \dots$ mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dass

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i].$$

Aufgabe: Zeige, wenn $\Pr[A|B] = \Pr[A|\bar{B}]$, dann $\Pr[A] = \Pr[A|B]$

$$\begin{aligned}\Pr[A] &= \Pr[A|B] \cdot \Pr[B] + \underbrace{\Pr[A|\bar{B}] \cdot \Pr[\bar{B}]}_{=\Pr[A|B]} = \Pr[A|B] \cdot (\underbrace{\Pr[B] + \Pr[\bar{B}]}_{=1}) \\ &= \Pr[A|B]\end{aligned}$$

Satz 2.15. (Satz von Bayes) Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ seien paarweise disjunkt. Ferner sei $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$ ein Ereignis mit $\Pr[B] > 0$. Dann gilt für ein beliebiges $i = 1, \dots, n$

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^n \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}.$$

Analog gilt für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \dots$ mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dass

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{\infty} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}.$$

□

UNABHÄNGIGKEIT

Definition 2.18. Die Ereignisse A und B heissen *unabhängig*, wenn gilt

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B].$$

Aufgabe: Zeige, dass wenn Ereignisse A und B unabhängig sind, auch A und $\bar{B}$ unabhängig sind.

$$\begin{aligned}\Pr[A] \cdot \Pr[\bar{B}] &= \Pr[A] \cdot (1 - \Pr[B]) = \Pr[A] - \Pr[A] \cdot \Pr[B] \\ &= \Pr[A] - \Pr[A \cap B] \\ &= \Pr[A \cap \bar{B}]\end{aligned}$$

Definition 2.22. Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ heissen *unabhängig*, wenn für alle Teilmengen $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_{i_k}]. \quad (2.2)$$

Eine unendliche Familie von Ereignissen A_i mit $i \in \mathbb{N}$ heisst unabhängig, wenn (2.2) für jede endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Lemma 2.24. Seien A , B und C unabhängige Ereignisse. Dann sind auch $A \cap B$ und C bzw. $A \cup B$ und C unabhängig.