

miniQUIZ

Es existiert ein Graph mit 51 Knoten, in dem jeder Knoten Grad 17 hat.

There exists a graph with 51 vertices in which every vertex has degree 17.

Handschlaglemma: $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$

☐ Wahr

☒ Falsch

Jede Brücke in einem Graphen ist zu mindestens einem Artikulationspunkt inzident.

Every bridge in a graph is incident to at least one articulation point.



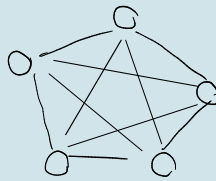
☐ Wahr

☒ Falsch

Es existiert ein 4-zusammenhängender Graph, in dem jeder Knoten Grad genau 4 hat.

There exists a 4-connected graph in which every vertex has degree exactly 4.

K_5



☒ Wahr

☐ Falsch

Ein Hamiltonkreis in einem Graphen besucht jeden Knoten genau einmal.

A Hamiltonian cycle in a graph visits every vertex exactly once.

☒ Wahr

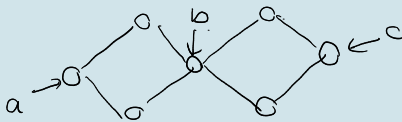
☐ Falsch

Für zwei Knoten a, b eines Graphen sei $a \sim b$ genau dann, wenn $a = b$ gilt oder wenn a und b auf einem gemeinsamen Kreis liegen. Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

For two vertices a, b of a graph, the relation $a \sim b$ when $a = b$ or a and b are on a common cycle is an equivalence relation.

☐ Wahr

☒ Falsch



$a \sim b$

$b \sim c$

$a \sim c$

Jeder zusammenhängende Graph mit allen Knoten geraden Grades hat einen Eulerkreis.

Every connected graph with all vertices of even degree has an Eulerian cycle.

☒ Wahr

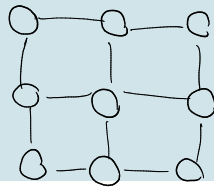
☐ Falsch

Jeder 2-zusammenhängende Graph hat einen Hamiltonkreis.

Every 2-connected graph has a Hamiltonian cycle.

☐ Wahr

☒ Falsch



Wenn $G = (V, E)$ ein 3-zusammenhängender Graph ist und $v \in V$, dann ist $G[V \setminus \{v\}]$ 2-zusammenhängend.

If $G = (V, E)$ is a 3-connected graph and $v \in V$, then $G[V \setminus \{v\}]$ is 2-connected.

☒ Wahr

☐ Falsch

Für jedes $t \geq 3$ ist ein vollständiger Graph K_t mit t Knoten 2-zusammenhängend.

For every $t \geq 3$ a complete graph K_t on t vertices is 2-connected.

☒ Wahr

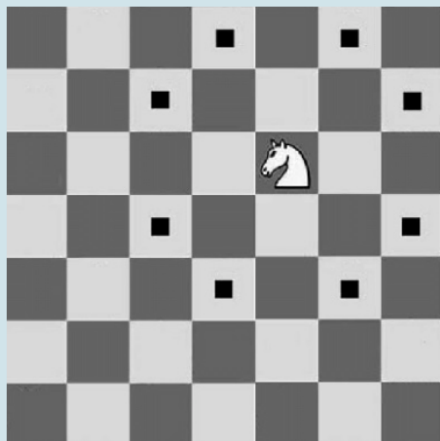
☐ Falsch

Es gibt einen Hamiltonkreis für einen Schachspringer, der auf einem 7×7 Schachbrett springt.

Zur Erinnerung: Nachfolgend sind die zulässigen Springerzüge im Schach aufgeführt.

There is a Hamiltonian cycle for a chess knight jumping on 7×7 chessboard.

As a reminder, legal chess knight moves are shown below.



☐ Wahr

☒ Falsch

HAMILTONKREISE (continued)

Satz von Dirac: Wenn $G=(V,E)$ ein Graph mit $|V| \geq 3$ Knoten ist, in dem jeder Knoten mind. $\frac{|V|}{2}$ Nachbarn hat, dann ist G hamiltonsch.

Beweis: Zuerst zeigen, dass G zusammenhängend ist.

• Seien $x, y \in V, x \neq y$ beliebig

Fall ①: $\{x, y\} \in E$ ✓

Fall ②: $\{x, y\} \notin E$

$N(x) \cap N(y) \neq \emptyset$, da $\deg(x), \deg(y) \geq \frac{|V|}{2}$

Widerspruchsbeweis: Annahme: G nicht hamiltonsch

• Sei $P = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ längster Pfad in G

• alle Nachbarn von v_1 und v_k in P , ansonsten $\nexists$ da P nicht längster Pfad

• $\exists i: 2 \leq i \leq k: v_i \in N(v_1)$ und $v_{i-1} \in N(v_k)$

→ v_1 zu mind. $\frac{|V|}{2}$ vielen Knoten inzident

→ wäre v_k zu keinem der entsprechenden v_{i-1} benachbart, dann wäre v_k nur zu max. $k-1 - \frac{|V|}{2} < \frac{|V|}{2}$ Knoten benachbart $\nexists$

• können nun Kreis bilden: $\langle v_1, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, v_1 \rangle$

• $k < n$ → ansonsten Hamiltonkreis $\nexists$

• $\exists v \in V$, die nicht auf dem Kreis liegen und zu einem Knoten der auf dem Kreis liegt inzident ist

→ wäre das nicht der Fall, wäre G nicht zusammenhängend

• wir können nun einen Pfad der Länge $k+1$ bilden $\nexists$ Widerspruch zur längsten Pfad Annahme

Das Finden von Hamiltonkreisen ist NP-vollständig

Wie finden wir einen Hamiltonkreis in exponentieller Zeit?

→ mit Hilfe von DP!

$$P_{S,x} := \begin{cases} 1 & \text{falls es einen 1-x-Pfad bestehend aus } S \text{ gibt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Auslesen der Lösung: G enthält Hamiltonkreis $\Leftrightarrow \exists x \in N(1)$ mit $P_{[n],x} = 1$

$$\text{Base Case: } P_{\{1,x\},x} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{1,x\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\uparrow$
 $\{1, \dots, n\}$

$$\text{Rekursion: } P_{S,x} = \max \{ P_{S \setminus \{x\}, x'} \mid x' \in N(x) \cap S, x' \neq 1 \}$$

Speicher: $O(|V| \cdot 2^{|V|})$

Laufzeit: $O(|V|^2 \cdot 2^{|V|})$

TRAVELLING SALESMAN PROBLEM (TSP)

Problemstellung: Graph K_n mit Gewichtsfunktion $\ell: \binom{[n]}{2} \rightarrow \mathbb{N}_0$, finde Hamiltonkreis C mit

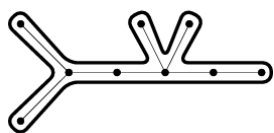
$$\sum_{e \in C} \ell(e) = \min \left\{ \sum_{e \in C'} \ell(e) \mid C' \text{ Hamiltonkreis in } G \right\} \quad [C \text{ kürzester Hamiltonkreis}]$$

Wie zeigen wir nun, dass TSP eine Verallgemeinerung des Hamiltonkreisproblems ist?

→ Reduktionsidee: $\ell(\{x,y\}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \{x,y\} \in E \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

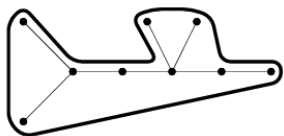
Metrisches TSP: TSP mit zusätzlicher Dreiecksungleichung
 $\ell(\{x,z\}) \leq \ell(\{x,y\}) + \ell(\{y,z\}) \quad \forall x,y,z \in V$

Satz: Für das metrische TSP gibt es einen 2-Approximationsalgorithmus mit Laufzeit $O(n^3)$.



1. Bestimme MST T
2. Verdopple alle Kanten von T
3. Bestimme Eulertour W
4. Durchlaufe W , mit Abkürzungen, so dass jeder Knoten nur einmal besucht wird $\Rightarrow$ Hamiltonkreis C

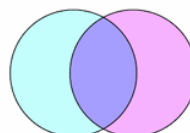
$$\begin{aligned} \ell(T) &\leq \text{opt}(K_n, \ell) \\ 2\ell(T) &\leq 2\text{opt}(K_n, \ell) \\ \ell(W) &= 2\ell(T) \leq 2\text{opt}(K_n, \ell) \\ \ell(C) &\leq \ell(W) \leq 2\text{opt}(K_n, \ell) \end{aligned}$$



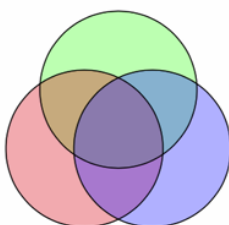
Satz 1.35. (*Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion*) Für endliche Mengen $A_1, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) gilt:

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_{l=1}^n (-1)^{l+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_l}| \\ &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\ &\quad - \dots + (-1)^{n+1} \cdot |A_1 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Für $n=2$: $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$



Für $n=3$: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

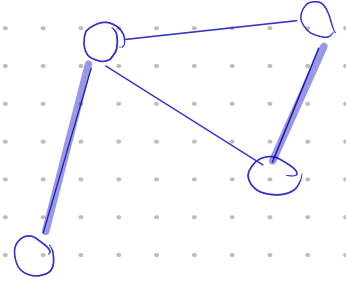


Matchings

Matching := Kantenmenge $M \subseteq E$, kein Knoten des Graphen zu mehr als einer Kante aus M inzident ist

Knoten v wird von M **überdeckt**, falls es eine Kante $e \in M$ gibt, die v enthält.

perfektes Matching: Wenn jeder Knoten durch genau eine Kante des Matchings überdeckt wird ($|M| = \frac{|V|}{2}$).



Ein Matching M ist...

- ...**inklusionsmaximal**, falls $M \cup \{e\}$ kein Matching $\forall e \in E \setminus M$
- ...**kardinalitätsmaximal**, falls $|M| \geq |M'|$ für alle Matchings M' in G

Wie kann man die Matchingeigenschaften perfekt, inklusionsmaximal und kardinalitätsmaximal in Verbindung setzen?

M perfekt $\Rightarrow M$ kardinalitätsmaximal $\Rightarrow M$ inklusionsmaximal

Matchings in Graphen finden

GREEDY-MATCHING (G)

- 1: $M \leftarrow \emptyset$
- 2: **while** $E \neq \emptyset$ **do**
- 3: wähle eine beliebige Kante $e \in E$
- 4: $M \leftarrow M \cup \{e\}$
- 5: lösche e und alle inzidenten Kanten in G

Laufzeit: $O(|E|)$

Aufgabe: Zeige, dass jeder Baum höchstens ein perfektes Matching hat

Lösungsidee: Bei den Blättern starten

- $\rightarrow$ jedes Blatt u und Vorgänger v , $\{u, v\} \in M$
- $\rightarrow$ wie bei Greedy u und v und alle inzidenten Kanten löschen
- $\rightarrow$ repeat

Dieses Matching ist das einzige perfekte Matching, da jede hinzugefügte Kante im perfekten Matching sein muss (es gibt keine andere Möglichkeit für ein perfektes Matching)