

ZUSAMMENHANG

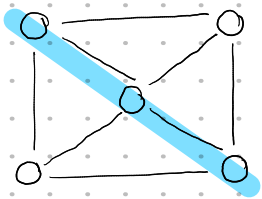
A&D-Recap: wann ist ein Graph zusammenhängend?

→ für Knotenpaar u, v gibt es einen $u-v$ -Pfad

Definition 1.23. Ein Graph $G = (V, E)$ heisst k -zusammenhängend, falls $|V| \geq k + 1$ und für alle Teilmengen $X \subseteq V$ mit $|X| < k$ gilt: Der Graph $G[V \setminus X]$ ist zusammenhängend.

Definition 1.24. Ein Graph $G = (V, E)$ heisst k -kanten-zusammenhängend, falls für alle Teilmengen $X \subseteq E$ mit $|X| < k$ gilt: Der Graph $(V, E \setminus X)$ ist zusammenhängend.

k -Zusammenhang
 $\Rightarrow k-1$ -Zusammenhang



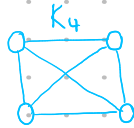
Ist dieser Graph 3-zusammenhängend? → Wahr
 Ist dieser Graph 4-zusammenhängend? → Falsch
 Ist dieser Graph 2-zusammenhängend? → Wahr

Für welche k ist dieser Graph k -kanten-zusammenhängend? → $k \in \{1, 2, 3\}$

Merkregel für Graphenzusammenhang

(Knoten-)Zusammenhang = Kanten-zusammenhang $\leq$ Minimalgrad

Beispiel für Gleichheit:
 K_n ("complete Graph")



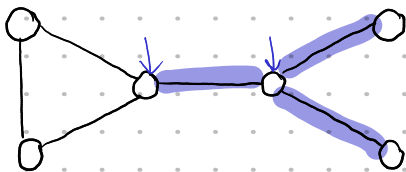
Satz von Menger:

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $u, v \in V, u \neq v$. Dann gilt:

- Jeder $u-v$ -Separator mind. Grösse $k \Leftrightarrow$ Es gibt mind. k intern-knotendisjunkte $u-v$ -Pfade
- " $u-v$ -Kantenseparator $\longleftrightarrow$ " $\Leftrightarrow$ " kantendisjunkte $u-v$ -Pfade

v ist **Artikulationsknoten** (cut vertex), wenn $G[V \setminus \{v\}]$ nicht zusammenhängend ist

$e = \{u, v\}$ ist eine **Brücke** (cut edge), wenn $G(V, E \setminus \{e\})$ nicht zusammenhängend ist



Lemma: Sei G zusammenhängend. Ist $\{u, v\} \in E$ eine Brücke, so gilt für u (analog für v):
 $\deg(u) = 1$ oder u ist ein Artikulationsknoten

HOW TO: Artikulationsknoten finden

Idee: DFS!

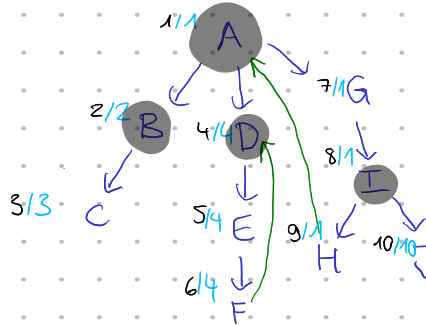
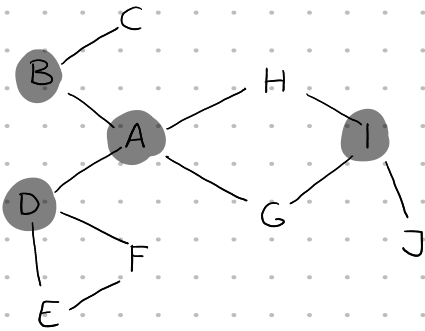
$low[v]$:= kleinste DFS-Nummer, die von v durch einen Pfad von beliebig vielen Vorwärts- und einer Rückwärtskante erreicht werden kann

DFS-Baumkanten

rekursive Berechnung: $low[v] = \min(dfs[v], \min_{(v,w) \in E} \begin{cases} dfs[w] & \text{falls } (v,w) \text{ Restkante} \\ low[w] & \text{falls } (v,w) \text{ Baumkante} \end{cases})$ in $O(|V| + |E|)$

Base Case: Knoten mit höchster DFS-Nummer
Berechnungsreihenfolge in absteigender DFS-Folge

Aufgabe: Finde DFS/low-Nummern bei DFS(A)



v Artikulationsknoten $\Leftrightarrow \begin{cases} v \text{ ist Wurzel in } T \text{ und } \text{Grad} \geq 2 \\ v \text{ ist nicht Wurzel und } \exists w \in V: \{v, w\} \in E(T) \text{ und } low[w] \geq dfs[v] \end{cases}$

eine gerichtete Kante (v, w) des DFS-Baums T ist eine Brücke $\Leftrightarrow$

$$low[w] > dfs[v]$$

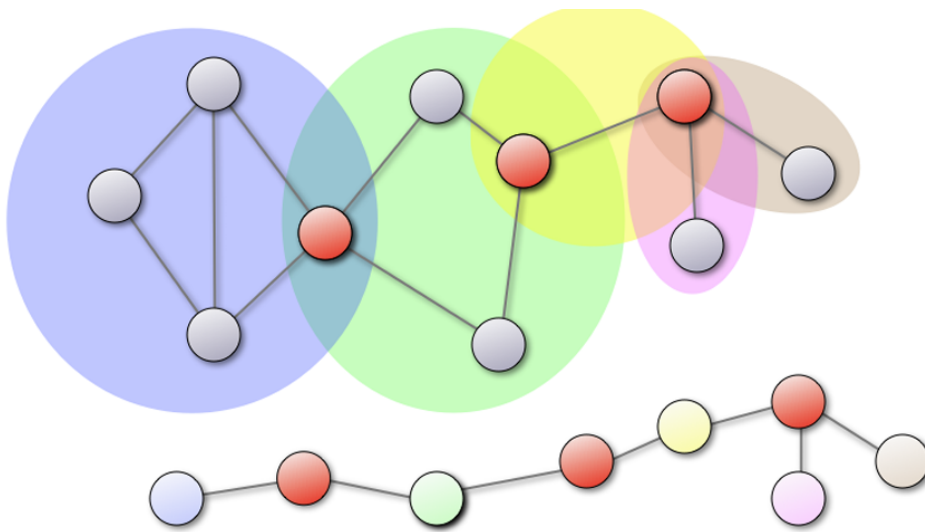
BLOCKE

Definition/Proposition 1.29. Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Für $e, f \in E$ definieren wir eine Relation durch

$e \sim f : \iff e = f$ oder es gibt einen gemeinsamen Kreis durch e und f .

Dann ist diese Relation eine Äquivalenzrelation. Wir nennen die Äquivalenzklassen *Blöcke*.

Blöcke schneiden sich (wenn überhaupt) immer in einem Artikulationsknoten



kann ein Blockgraph kreise haben? $\rightarrow$ Nein

Kreise

Sei $G=(V,E)$ zusammenhängend.

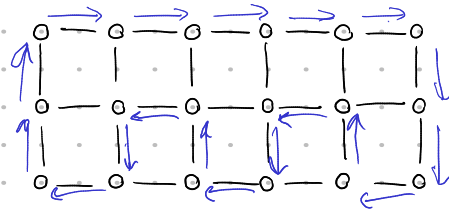
G hat einen **Eulerzyklus** $\Leftrightarrow \forall v \in V: \deg(v) \equiv_2 0$

G hat einen **Eulerweg** $\Leftrightarrow$ max. 2 Knoten mit ungeradem Grad

Gibt es ähnliche "Methoden" für Hamiltonkreise?
 $\rightarrow$ nein, NP-schwer

Spezialfälle für Hamiltonkreise

$n \times m$ -Gittergraphen, falls $n \cdot m \equiv_2 0$

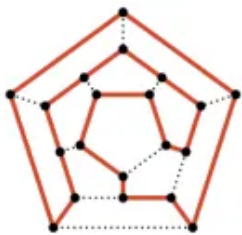


Lemma 1.38. Ist $G = (A \uplus B, E)$ ein bipartiter Graph mit $|A| \neq |B|$, so kann G keinen Hamiltonkreis enthalten. $\square$

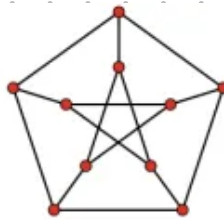
d -dimensionale Hyperwürfel mit $d \geq 2$

$\rightarrow V = \{0,1\}^d$

$\rightarrow$ Kanten zwischen Knoten, die sich nur durch eine Ziffer unterscheiden



Ikosaeder



Petersengraph



Aufgabe: Wie viele Hamiltonkreise gibt es in K_n ?

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

$$\frac{n!}{n \cdot 2} = \frac{(n-1)!}{2}$$

Exercise 0.4 – A General Property of Graphs

Prove that every graph G with $n \geq 2$ vertices contains two distinct vertices $v \neq w$ such that $\deg(v) = \deg(w)$.

Hint: For a given n , what is the maximum possible degree a vertex can have?

Pigeonhole Principle

$$\forall v. \deg(v) \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

→ wenn es einen Knoten mit Grad $n-1$ gibt, dann kann es keinen mit Grad 0 geben

→ $n-1$ mögliche Knotengrade im Graphen (gleichzeitig)

□

MINIQUIZFRAGEN

1) Der Kreis auf acht Knoten (C_8) ist 2-zusammenhängend.

→ Richtig, alle Kreise sind 2-zusammenhängend



2) Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$, der keinen Artikulationsknoten enthält, ist 2-zusammenhängend.

→ Richtig

3) Sei G ein zusammenhängender Graph, $T(G)$ ein Spannbaum von G und $e \in E(T(G))$ eine Kante im Spannbaum. Es gilt: e ist eine Brücke in G .

→ Falsch

4) Für einen zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$, der in einer Adjazenzmatrix gespeichert ist, kann man in Zeit $O(|V|^2)$ alle Artikulationsknoten und alle Brücken berechnen.

→ $O(|E| + |V|)$, $O(|E|) \leq O(|V|^2)$

5) In einer Tiefensuche sei $w \in V$ das erste Kind von $v \in V$ im DFS-Baum.

Falls $\text{low}[w] \geq \text{dfs}[v]$, so ist v ein Artikulationsknoten.

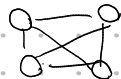
→ Falsch, v könnte Wurzel sein

6) Gegeben sind für einen Graphen G zwei Blöcke A, B mit $A \neq B$. Dann liegt keine Kante sowohl in A als auch in B .

→ Richtig

7) Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und sei die Anzahl seiner Knoten mit ungeradem Grad gerade. Dann enthält G eine Eulertour.

→ Falsch, Gegenbeispiel:



8) Seien $k, \ell > 1$ und k, ℓ beide ungerade. Das $(k \times \ell)$ -Gitter enthält keinen Hamiltonkreis.

→ Richtig

9) Sei n eine natürliche Zahl und G ein bipartiter Graph auf $2n + 1$ Knoten. Dann gilt: G enthält keinen Hamiltonkreis.

→ Richtig, siehe Lemma dazu

10) Vollständige Graphen sind die einzigen zusammenhängenden Graphen, welche sowohl eine Eulertour als auch einen Hamiltonkreis enthalten.

→ Falsch, C_4 ist ein Gegenbeispiel

Im Folgenden sei $G = (V, E)$ ein **zusammenhängender** Graph mit mindestens drei Knoten, d.h. $|V| \geq 3$.

- (a) Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn $\deg(v)$ für alle $v \in V$ eine gerade Zahl ist, dann ist G 2-Kanten-zusammenhängend. Gilt die umgekehrte Implikation ebenfalls? Genauer: Gilt für jeden 2-Kanten-zusammenhängenden Graph $G = (V, E)$, dass für alle $v \in V$ der Grad $\deg(v)$ eine gerade Zahl ist?
- (b) Angenommen G hat Minimalgrad 2. Ist G notwendigerweise 2-Kanten-zusammenhängend?

a) Annahme: G ist nicht 2-kanten-zusammenhängend.

$\rightarrow \exists$ Brücke $e = \{a, b\}$

$\rightarrow G[E \setminus \{e\}]$ hat zwei ZHK A und B

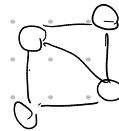
$$\rightarrow \sum_{w \in A} \deg_A(w) = \deg_A(a) + \sum_{w \in A \setminus \{a\}} \deg_A(w)$$

$$\cong \deg_G(a) - 1 + \sum_{w \in A \setminus \{a\}} \deg_G(w)$$

$$= \underbrace{\sum_{w \in A} \deg_G(w)}_{\cong 0} - 1$$

$$\underbrace{\quad}_{\cong 1} \quad \Leftrightarrow \text{Handschagenlemma}$$

umgekehrte Implikation falsch, Gegenbeispiel:



b)

